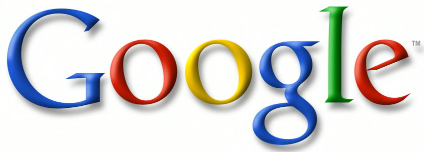


EXLIBRIS
VAN EEN VOORBIJGANGER



CAMINO DE SANTIAGO
N°

INLEIDING
TOT DE
KEEGEL-SNEEDEN.

Waar in bevat worden de voornaamfte eigenfchappen welke noodig zyn tot de kenniffe der beweegingen van de lighaamen die in hunnen weg deeze kromme lynen befchryven, volgens de Wetten der algemeene Zwaarte krachten.

In het Franfch befchreeven,

DOOR

DEN HEER

MAUDUIT,

Antoine René

HOOGLEERAAR IN DE WISKUNDE.

Vertaald en met Aanteekeningen vermeerdert,

DOOR

J. J. BLASSIERE,

LEERMEESTER IN DE WISKUNDE.

Te LEYDEN,

By de Wed. A. HONKOOP EN ZOON, EN C. VAN HOOGEVEEN, JUNIOR, 1764.

OPDRAGT

AAN DEN

WEL EDELE GEBOOREN HOOG-
GELEERDEN HEERE.

JOHAN LULOFS

Leeraar in de Rechten en Hoog-Leeraar in de Wysgeerte, Wiskunde en Sterrekunde in de Hooge Schoole te Leiden, Meedelid der Koninglyke Maatschappyen der Weetenschappen van Berlyn en Londen, als meede van de Hollandsche Maatschappy der Weetenschappen, Inspecteur Generaal der Rievieren van Holland en West-Vriesland en Correspondent der Koninglyke Fransche Maatschappy der Weetenschappen, enz. enz. enz.

WEL EDELE GEBOOREN HOOG-
GELEERDE HEER.

DEEZE myne Vertaaling, en proeve van Aanteekeningen op het beknopt doch doorwrocht

Werkje van den Heère *Mauduit*, door den druk gemeen zullende maaken, begreep ik dat my een aanzienelyke Naam te zoeken ſtond onder wiens beſcherminge het in 't oopenbaar mogt verſchynen. Myne Jonkheid en des de geringe vorderingen die ik in het perk der Letteroefeningen tot nog toe gedaan heb, maaken zulks voor my van eene volſtrekte noodzaakelykheid. Maar tot wien zoude ik my beeter kunnen keeren dan tot Uw Wel Ed: Geb: Hooggel: die zoo ten opzichte van het Algemeen, als van my in 't byzonder, alle die hoedaanigheeden in de hoogſte graad vereenigt, welke ik in een Voorſtander, Beſchermer, en Begunſtiger deezer Vrugten van myn arbeid, zoude kunnen verlangen. Uw Wel Ed: Geb: Hoog-

ge-

gel[s] wyd bekende Naam en zoo wel verdiende Lof, welke de Dankbaare getuigenissen der Geleerde Waereld, alom, beeter dan ik hier melden durf, verbreiden, zyn genoegzaam om myn Werk teegens alle gevaaren te dekken en my daar van een gelukkigen uitslag te doen hoopen, en Uw. Wel Ed: Geb: Hooggel[s] Menschlievende en Kunstkweekende Aart, jaa zelvs de goedkeuring waar meede Uw Wel Ed: Geb: Hooggel: myne Vertaaling wel hebt willen vereeren, geeven my moed en vertrouwen dat Uw Wel Ed: Geb: Hooggel: my zyne gunstige Bescherminge niet zal weigeren.

Ontvang dan Wel Edele Geboore Hooggeleerde Heer myne neederige aanbieding met Uw Wel Ed: Geb: Hooggel[s] gewoone goed-

zaardigheid en vriendelykheid, vermeerder daar door de reedenen myner verplichting, en houd in Uw Wel Ed: Geb: Hooggel: gunstig aandenken, needrig aanbevoolen den geenen die met de gevoelens van de zuiverste en oprechtste eerbied, hoogachting en erkentenisse, de eer heeft zig te noemen

WEL EDELE GEBOOREN HOOGGELEERDE HEER

UW WEL ED: GEB. HOOGGEL.

Ootmoedige en zeer gehoorzaame Dienaar

J. J. BLASSIERE.

VOOR-REEDEN

VAN DEN

SCHRYVER.

DIT Werkje dat in 't geheel zes Hoofdſtukken uitmaaakt, heeft twee byzondere deelen; in het eerſte dat vier Hoofdſtukken inhoud, hebbe ik my voorgeſteld te vereenigen al het geene dat noodzaakelyk is aan alzulken die myn Boekje tot richtſnoer hunner onderwyzingen in dat deel der Wysgeerte, op de Hooge Schoolen zouden moogen verkiezen; hebbende ten dien einde getracht alle moogelyke netheid, klaarheid en verſtaanbaarheid aan myne Wiskunſtige betoogingen te geeven; immers voor zoo veel de natuur der onderwerpen zulks toe konde laaten. Ik hebbe 'er ook eenige Voorſtellen ingevoegt die ſchoon niet volſtrekt tot de verſtaanbaarheid der volgende dienende,

echter ook hier in plaats konden hebben, en die met dit teeken (**) van de andere onderſcheiden; zoo dat men dezelve indien men zulks goedvind, zal kunnen voorby gaan. De twee laatſte Hoofdſtukken, die het geheele tweede deel beſlaan, dienen eenigzints als eene inleiding tot de *Analyſes* der *reekzen* en der *nieuwe uitgevonden Bereekeningen.* In deeze hebbe ik voor 't grootſte gedeelte gewerkt voor die geenen, welke hunne Oefeningen verder dan de Begintzelen trachten voort te zetten, en zig door eigen arbeid zouden willen in ſtaat ſtellen, om de voornaamſte ontdekkingen die 'er door de heedendaagſe *Analyſis* gedaan zyn, naa te ſpooren.

In het vyfde Hoofdſtuk vind men nochtans twee Grondleſſen, die betrekkelyk zyn tot de beweegingen der lighaamen welke in hunnen loop een der Keegel-ſneeden beſchryven, volgens de Leerwyze van

New-

Newton noopens de Algemeene Zwaarte-krachten. De Betoogingen zyn in dat deel vry kort doch zaakelyk, en men heeft getracht, zoo veel het doenlyk was, veele zaaken met weinig woorden uit te drukken, zonder eevenwel de klaarheid uit het het oog te verliezen, welke eene der voornaamſte hoedaanigheeden is die in diergelyke werken vereiſcht worden.

Dusdaanig is de algemeene Schets van dit Werkje; doch dewyl men zig zomtyds verbeelden mogt, dat het ſlechts eene herhaaling waare van het geene 'er weegens de Keegel-ſneeden in alle de Werken die oover dezelve handelen, gevonden word; hebbe ik my verplicht geacht, oover ieder Hoofdſtuk in 't byzonder, in eene naadere beſchryving te treeden, op dat men des te beeter oordeele, wat my als eige werk toekomt, ten minſte noopens de wyze van voordraagen dier reeds lang bekende waarheeden.

In het eerste Hoofdstuk, naa eene Bepaalinge des Keegels gegeeven te hebben, en aangetoont op wat wyze dat lighaam gesneeden word, bepaale ik, wat men door Vergelyking van eene kromme lyn verstaat; deeze bepaaling op een Cirkel toepassende, toon ik, hoedaanig die vergelykingen dienen kunnen tot de beschryving der kromme lynen, en op wat wyze men door dat middel de voornaamste eigenschappen derzelver kan naaspooren. Dit eerste Hoofdstuk verstrekt tot eene inleiding aan het geheele Werk. De drie volgende zyn geschikt tot het onderzoek der drie Keegel-sneeden ieder in het byzonder. Uit de beschryving dier kromme lynen op een vlak, door middel van haare *brandpunten*, worden de voornaamste eigenschappen, met betrekking tot haare Assen, afgeleid. Daar naa betoogt men, dat die zelvde eigenschappen meede plaats hebben

ben in betrekking van hunne middellynen; uit het welke men dan ook ieder haare byzondere vergelyking afleid. Vervolgens bepaald men ook de Stelkundige waardyen der voornaamste lynen, als naamentlyk der *Parameeters*, der *Raaklynen* der *Onder-raaklynen*, der *Loodlynen* en der *Onder-loodlynen*.

Ieder deezer kromme lynen dus byzonderlyk beschouwd zynde, leert men in het vyfde Hoofdstuk eene algemeene Saamenstelling (*Constrution*) voor de drie Keegel-sneeden; welke Saamenstelling echter maar een byzonder geval is van eene nog algemeener, die men zich vernoegt heeft slechts in 't voorby gaan aan te wyzen. Door middel van deeze beschryvingen is men in staat de *Elips* en de *Hyperbel* teffens te verhandelen; deeze kromme lynen zoo onderscheiden in gedaante, schynen dus een en dezelvde te zyn, zoo wonder wel

koo-

koomen zy met elkander oover een in alle haare eigenſchappen, welker ſtelkundige uitdrukkingen enkel en alleen in de teekens verſchillen. De *Parabel* die de ſcheidspaal tuſſchen de *Elips* en de *Hyperbel* is, word van beiden afgeleid, en kan naar gevalle of onder het *Eliptiſch*, of onder het *Hyperboliſch* geſlacht gereekend worden. Het meenigvuldig gebruik dat men van het *oneindige* maakt om tot eenige bekende en reeds door het *eindige* betoogde waarheeden te geraaken, maakt den beginneren eenigſints met dat *oover-natuurkundig* denkbeeld gemeen, en leerd hen, hoe voorzigtig men zoo eene teedere ſtoffe behoord te behandelen.

In dat zelvde Hoofdſtuk vind men ook eene Leerwyze weegens de *kromte-ſtraalen* voor iedere Keegel-ſneede, beneevens hunne ſtelkundige waardyen; hier hebbe ik ook eenige Vraagſtukken by gedaan

daan, welke als Grondleſſen zoude kunnen voorgeſteld worden; maar ik hebbe liever de *Analytiſche* Leerwyze willen volgen, om dat de Oploſſingen en Saamenſtellingen dan teffens beweezen worden, door een gevolg zelvs van de bewerkingen.

Eindelyk is het zeſde Hoofdſtuk, zoo als reeds gezegt is, eene inleiding tot de *Reekening der oneindigen*, en tot de *nieuwe Bereekeningen* (*Calculs nouveaux*) die door middel der *Reekzen* te weeg gebragt worden, van welke ik eene nieuwe Leerwyze meede-deele; om tot dezelve te geraaken, beginne ik met de Bepaalingen der Keegel-ſneeden van de *hoogſte Ordens*, waar van dan ook de algemeene vergelykingen der zelver afgeleid worden; eene nieuwe Grondles weegens de *Meetkunſtige Reekzen*, welke my onbetoogt meede gedeelt was, geeft

geeft my voorts (*), een zeer eenvoudig middel aan de hand om tot de algemeene uitdrukking der *Onder-raaklynen* voor alle de *kromme lynen van het Parabolisch geslacht* te geraaken. Van daar gaa ik door middel van eenige bekende Grondlessen oover tot de *inhoud-vinding* dier kromme lynen, tot welke ik ooverbreng die van alle de andere kromme lynen, saamengesteld zynde uit een meenigte *Parabolische Ordinaaten* welker aantal *eindig* of *oneindig* is, naar maa-

(*) Deeze Grondles, door den Engelsche Wiskunstenaar *Landen* uitgevonden, ben ik schuldig aan een voortreffelyk Meetkundige, aan wien ik van myn kant meedegedeeld had de wyze langs welke ik door middel van de *inhoud-vinding* der kromme lynen van het *Parabolisch Geslagt*, tot *Theorie* der *reekzen* meende te geraaken, zonder andere kundigheeden te veronderstellen, dan de vergaadering der Leeden van eene Meetkunstige *progres.*

maate dat de ſtelkundige uitdrukking van de *Ordinaat* tot een *eindige* of *oneindige reeks* gebragt kan worden; het welke my geleegentheid geeft, om de onderſcheiden Stelkunſtige *inhoud-vindingen* der kromme lynen op te tellen. Ik houde my bynaa verzeekert, dat de Heer *Newton* door een diergelyken weg tot de ontdekking der *Fluxie Reekening* gekoomen is, van welke Reekening deeze ſlechts hier in verſchild, dat ik de *Fluxie* der *Absciſſe* gelyk aan de eenheid ſtelle; het welke de Heer *Newton* zelvs gedaan heeft, in een Werk, naar het welk ik mynen Leezer te rug zende.

De Kundigen zullen dien grooten Man niet beſchuldigen, dat hy de inhoud-vinding der kromme lynen van het *Parabolisch geſlacht*, op een loſſen voet ondernoomen heeft. Deeze Leerwyze der *reekzen* eens vaſt geſteld zynde, koome ik weeder tot de ſtelkundige *inhoud-vinding*

der

der Keegel-ſneeden. Op de zelvde wyze zoek ik den inhoud der *Hyperboliſche vierhoeken*; het welke my natuurlyk geleid tot de Leerwyze der *Logarithmi* of Kunſttallen, welke in de meeſte Begintzelen niet dan zeer oppervlakkig geleerd worden, en alleen wat byzonderlyk verhandeld zyn in zulke Werken, die ver booven de Begintzelen geſteld worden; ik hebbe het meeſte merkwaardige verhandelt dier getallen, welke den roem hunner uitvinder altoos zullen doen Leeven.

Hier word ook geleerd, op wat wyze de *Logarithmi* van de eerſte getallen bereekend worden.

Eindelyk geeve ik de wyze, op welke de inhoud der *Hyperboliſche vierhoeken* gevonden word door middel van de gewoone *Logarithmi*, welke door verſcheide Schryvers zoo verkeerdelyk van de *Hyperboliſche Logarithmi* onder-

ſchei-

ſcheiden worden. Wel weet ik, dat deeze oploſſing de inhoudvinding van de *Hyperbel* reeds veronderſteld; maar die geene welke deeze teegenwerping weegens de inhoudvinding der *Hyperbel* willen maaken, moeten om de zelvde reeden de oploſſing der driehoeken door middel van de *Taafels der hoekmaaten* meede verwerpen, om dat die oploſſing meede de oploſſing van eenen gelykvormigen driehoek veronderſteld. Hier zal men ook zien wat 'er door een *Saamenſtel van Logarithmi* (*Siſtéme de Logarithmes*) verſtaan word, en het geene de Wiskunſtenaaren door de *Module* van iedere Saamenſtelling verſtaan. Behalven de eigenſchappen welke de *Hyperbel* heeft noopens de *Logarithmi*, heeft de zelve 'er nog wonderbaarlyker, weegens haare *misloopers*.

De *oneindige ruimte* die 'er tuſſchen de kromme lyn en haar misslooper

** be-

bevat is, geeft my geleegentheid om de eigenſchappen van dit *oneindig* naa te gaan. Niet alleen tracht ik te doen zien dat die ruimte oneindig is, maar ook te toonen waarom zy zulks weezen kan. Deeze beſpiegelingen geleiden my tot zoo klaar een grond-begintzel, dat men door het zelve aanſtonds de oovereenkomſt gewaar kan worden van zulke waarheeden, die het allerteegenſtrydigſte met elkander ſcheenen te zyn. Eindelyk beſluit ik myn Werk met eene algemeene Grondles, weegens de gelykvormige Keegel-ſneedèn, van welke een oneindig aantal weetenswaardige Waarheeden noopens de *uitwendige en inwendige ſnylynen* kunnen worden afgeleid, en uit welke men meer gemakkelyk de fraayſte Oploſſingen van een meenigte Vraagſtukken zal kunnen haalen.

VOOR-REEDEN

VAN DEN

VERTAALER.

DE *groote en algemeene nuttigheid, die 'er uit de voortplanting der Wiskunde te haalen is, is te veel bekend, dan dat ik my zoude behoeven te verleedigen, dezelve in deeze Voor-reeden stuk voor stuk aan te toonen, of den lof der Wiskunde breedvoerig op te haalen. Ons Vaaderland in-zonderheid heeft voor een groot gedeelte deszelvs behoud daar aan dank te wyten. Immers is het om zoo te spreeken aan de Wiskunde alleen, dat men verschuldigt is, zoo niet weegens de uitvinding ten minste weegens de groote verbeeteringen die dezelve toegebragt heeft aan die behoud-middelen, naamentlyk aan de Sluyzen, Moolens, enz. zonder welke dit Land niet dan een onbewoonbaare modderpoel zyn zoude. Geen wonder dan, dat de Wiskunde, en de Weetenschappen daar toe betrekkelyk, altoos en te recht in de grootste agtinge geweest zyn. Wenschelyk is het on-*

dertusschen, dat door de verdere voortplanting mooge worden verbeetert die onvolmaaktheeden welke in de genoemde en andere behoud-middelen en Werktuigen zich nog opdoen.

De bekwaamste hulpmiddelen nu die 'er tot de verbeetering derzelver uitgedacht kunnen worden, zyn voornaamentlyk te vinden in de Verheeve Wiskunde. Een Weetenschap, welke naauwlyks zeeventig of tagtig Jaaren geleeden te voorschyn is gekoomen; en nog zoo weinig in ons Vaaderland bekend is, dat het bynaa iets wonders is iemand onder onze Landsgenooten te vinden wiens kennisse zich zoo verre uitstrekt, ten zy hy uitheemsche taalen verstaande het by Schryvers van andere gewesten geleerd heeft.

Dit heeft my genoopt tot het vertaalen van dit Werkje; welkers inhoud in den eersten opslag niet nieuw schynt te weezen; naardien Kinkhuizen, De Graaf *en andere Schryvers de,* Keegel-sneeden *reeds verhandelt hebben; de fransse Leertrant die 'er in waargenoomen is, de veelvuldige nieuwe ontdekkingen, zoo noopens de* Reekzen, Inhoud-

vin-

vindingen der kromme lynen *door middel derzelver, als hoopens de* Logarithmi, (*welken ik niet weet dat eene Neerduitsche Schryver op deeze wyze verhandeld heeft*) *maaken dat dit Werk aangemerkt kan worden, als het eenigste dat 'er in onze taal over dat onderwerp geschreeven is, het welke de tusschen-wyze vervult, die 'er tusschen de eerste Grond-beginzelen en de Verheeve Wiskunde is, en dus als eene Inleiding tot die Weetenschap.*

De Weetenschappen wier kennis hier in veronderstelt word, zyn de gemeene Telkunde, *de* Meetkunde, *zoo als die in* Euclides *zes eerste en in het elfde en twaalfde boeken geleerd worden, die ook in veele plaatsen aangehaald zyn; en de gemeene* Stelkunde *tot de* Vierkants-vergelykingen *toe, de* Exponentiaal Reekening *daar onder begreepen.*

Ik hebbe hier en daar eenige Aanteekeningen by gevoegt, en dezelve met een kleiner letter doen drukken, agter die §. *waar toe zy behooren. By voorbeeld, agter het eerste Hoofddeel, hebbe ik de Leerwyze weegens*

de vergelykingen der kromme lynen wat meerder uitgebreid; hier in volgende het geene de Heeren Euler *en* Cramer, *weegens die vergelykingen gezegt hebben.*

In het tweede Hoofddeel, hebbe ik eenige Grondlessen weegens de Parabel *by gevoegt; waar onder 'er een is door middel van welke de loop der* Comeeten *bereekend kan worden.*

Aan het einde van het vierde Hoofddeel, geeve ik die eevenreedigheid van de Cirkel, welke door den Grooten Euler *is bereekend geworden.*

In het vyfde Hoofddeel, hebbe ik insgelyks eenige Grondlessen opgegeeven, als meede een Vraagstuk, het welke de Heer La Caille *in zyne Sterrekunde geeft, om de* waare Anomalie *te bepaalen.*

In het zesde Hoofddeel, maak ik eenige Aanmerkingen weegens de Reekening der oneindigen; *trachtende meede de Leerwyze der* Logarithmi *wat breeder te verklaaren. Hier hebbe ik nog zes* Formulæ *by gedaan, door middel van dewelke men in staat is de* Logarithmi *voor allerly getallen op eene gemakkelyke wyze te vinden.*

De

De Griekſche en Latynſche benaamingen ſommiger lynen, hebbe ik meeſtentyds in myne ooverzetting, onvertaald gelaaten, tot gemak van den Leezer, om dat zy bynaa in alle Wiskundige Werken, het zy Neederduitſche, of anderen, onder de zelvde benaamingen voorkoomen.

Voor 't ooverige, hebbe ik in alles meer de duidelykheid dan de cierlykheid betracht, zoo in de vertaaling als in myne Aanteekeningen welke ik veel zoude vermeerdert hebbe had ik niet gevreeſt te breedvoerig te ſchynen, dierhalven verzoeke ik den beſcheiden Leezer my te willen vergeeven, indien 'er eenige gebreeken weegens de taal in dit boekje mogten gevonden worden, en mynen Arbeid met gunſtige toegeevendheid te willen ontvangen.



VER-

VERKLAARING

der Merkteekens in dit Werk gebruikt.

$=$ Beteekent gelyk.

$+$ ——— meer; dus $a+b$ is eeven zoo veel als a tot b vergaard.

$-$ ——— min; dat is $a-b$, wil zoo veel zeggen als a min b.

$\times$ of ( ), verbeeld vermeenigvuldigt: Dus is $a\times b$ zoo veel als a vermeenigvuldigt door b; eeven zoo is het met $(a+b)c$ of $(a+b)\times c$.

$>$ beteekend grooter: dat is $6>4$ of 6 grooter als 4.

$<$ ——— kleiner: dus $3<5$ of 3 kleiner als 5.

$\triangle$ ——— driehoek.

$\square$ ——— vierkant, vierhoek of *paralelogram.*

$\backsim$ ——— gelykvormig, wanneer a gelykvormig is aan b, schryft men het zelve $a \backsim b$.

$\perp$ beteekent loodrecht.

INLEI-

INLEIDINGE
TOT DE
KEEGEL-SNEEDEN.



EERSTE HOOFD-DEEL.

Van de teelinge des Keegels en van desselfs onderscheide soorten. Van de verschillende gedaantens van kromme lynen die voortkoomen wanneer dat ligbaam door een vlak gesneeden word. Eenige kundigheeden betreffende de wyze om de kromme lynen door middel van de Vergelykingen aan te wyzen, en van de beschryving dier kromme lynen uit hunne byzondere Vergelykingen voortkoomende.

BEPAALINGEN.

§. 1. ZY gegeeven een Cirkel ADBE (*Fig.* 1.) en een punt S verheeven booven het vlak, in welk het gegeeve Cirkel is; Zoo men door dat punt S

 een

een onbepaalde rechte lyn ZSY laat loopen zoodaanig gehegt zynde in S, dat dezelve kan beweegen zonder dat punt S te verlaaten; en het onderste gedeelte ZS van die rechte lyn ZSY eens rontom de gegeeve Cirkel ADBE gaat zal dezelve door deeze beweeging (altoos in het punt S vast gebleeven zynde) een lighaam ASEBD beschryven hebbende een kromme of bolle oppervlakte SADBEA en voor bazis den gegeeven Cirkel ADBE. Aan welk lighaam de Wiskunstenaars de naam van *Keegel* gegeeven hebben.

§. 2. Het gegeeve onbeweeglyke punt S is de *Top* van de Keegel; de rechte lyn SC die getoogen is uit den top S tot aan het middelpunt C van het Circkel ADBE, werd den *As* van de Keegel genoemd.

§. 3. Daar zyn twee soorten van Keegels; de *Rechte of Rechthoekige*, en de *Schreeven* of *Scherphoekige*. Een Keegel is Rechthoekig, wanneer zyn as CS loodrecht of perpendiculaar staat op het vlak van zyn bazis; en Scheefhoekig wanneer

neer die As hellende op het vlak van de bazis ſtaat.

Eerste Gevolg.

§. 4. Uit deeze voort-teelinge van den Keegel volgt Ten 1e. Dat een iegelyke rechte lyn van den top S tot eenig punt aan den omtrek der bazis getoogen, op de oppervlakte van den Keegel vallen moet: Ten 2e. Dat zodaanige een lyn getoogen van den top tot eenig punt binnen of buiten de bazis van den Keegel, ook binnen of buiten den zelve vallen zal: Ten 3e. Dat zoo de Keegel geſneeden wierd door een vlak ASD, gaande door den top S en ſneidende den bazis in de lyn AD, deeze ſneede ASD nootzaakelyk een driehoek weezen moet; want de lynen AS en SD (gemeene ſneeden van dat vlak met de oppervlakte van den Keegel) zyn rechte lynen: door de voortteelinge van den Keegel (§ 1.) en AD is meede een rechte lyn wyl het de gemee-

ne ſneede is van het vlak en van de bazis van den Keegel (*a*).

II. GEVOLG.

§. 5. Uit deeze bepalinge volgt nog, dat, indien de Keegel geſneeden word met een vlak gaande door desſelfs as, zal die ſneede altoos lootrecht of perpendiculaar zyn aan het vlak van den bazis, in den Rechten Keegel; en altoos hellende in eene Scheeve; ten zy dat ſneidende vlak meede gaa door een lyn die uit den top lootrecht op den bazis van den Keegel getoogen is. Om nu deeze laatſte driehoekige ſneede in den Keegel van alle de andere driehoekige die in dezelve gemaakt kunnen worden te onderſcheide, en om dat deeze van groot gebruik is in het naſpeuren der eigenſchappen van dezelve heeft men hem den naam van *Aſſen-Driehoek* of *Driehoek door den As* gegeeven. Zoo dat in een rechte Keegel alle de Aſ-

T in een schee-ve Kegel

ſe

(*a*) Ecl. III: 11.

ſe driehoeken lootrecht op de bazis zyn; en in den ſcheeven Keegel is 'er maar eene; die bepaald word met uit den top S eene lootrechte SK op het vlak van den Cirkel ADBE te laate vallen; en door dezelve SK en den As CS een vlak te laaten gaan.

III. GEVOLG.

§. 6. Alzoo het Cirkel welk voor bazis dient, zoo ver van het punt S kan geplaats worden als men goet vind; of het geene op 't zelve uitkomt, alzoo de lyn YZ onbepaald is; volgt nog uit de voortteelinge van den Keegel, dat, dat ligbaam en zyne bolle oppervlakte oneindig (*b*) booven en onder het punt S uitgebreid kan veronderſteld worden te zyn. Dewyl het klaarblykelyk is, dat terwyl het deel ZS van die onbepaalde lyn YZ den Keegel ASB beſchryft, het andere deel (naamentlyk SY) de bolle oppervlak-

(*b*) Ziet de beteekenis van dit oneindig § 246.

vlakte ISL van een teegenoverstaande gelykvormige Keegel beschryven zal.

EERSTE GRONDLES.

§. 7. *Indien een Keegel* ASB (Fig. 2.) *gesneeden word door een vlak* EFH *dat paralel of eevenwydig is aan het vlak van den bazis: zal de sneede* EFH *een Cirkel zyn.*

BETOOGINGE.

Trekt uit den top S tot aan het middelpunt C van de bazis den As CS gaande door een punt D van het sneidende vlak EFH; door twee punten A en G na welgevalle genoomen in den omtrek van den bazis, trekt twee lynen AS en GS tot aan den top S; welke lynen het sneidende vlak aan raaken in de punten
T §4, 1e geval E en F, en laat in ieder deezer vlakken EFH en AGB de lynen ED, FD; AC en CG getoogen zyn. Dewyl het sneidende vlak eevenwydig of paralel is aan het vlak van den bazis en dat dezelve gesnee-

sneeden worden met dien van de Δ^n ACS en GCS. Zoo zyn de lynen ED en AC als meede FD en GC paralel of eevenwydig aan elkander (*c*), en dus zyn de Δ^n ACS en EDS ∾ als meede de Δ^n GCS en FDS.

Bygevolg is AC: DE = CS; DS (*d*)
en . . . . . CS: DS = GC: FD
Dus. . . . . AC; DE = GC; FD (*e*)

Maar AC is gelyk aan CG (wyl de bazis AGB een Cirkel is volgens § 1). Bygevolg is DE = FD (*f*).

Deeze betooging meede plaats hebben voor een iegelyke rechte lyn uit het punt D tot den omtrek EFH van de sneede getoogen; zoo volgt dat die sneede een cirkel is.

D. B. M. W.

BEPAALINGEN.

§. 8. Eerstelyk, laat 'er een Assen driehoek CSD (*Fig.* 3.) in den Keegel na gevalle

(*c*) Eucl. XVI: 11. (*d*) Eucl. Def. I: 6.
(*e*) Eucl. XI: 5. (*f*) Eucl. XIV: 5.

valle genoomen zyn en in die driehoek eene rechte lyn AB paralel aan een der opſtaande zyden als by voorbeeld paralel aan DS. Laat door het punt B, daar die lyn AB de bazis van den driehoek ſnyd in het vlak van den cirkel CND, eene lootrechte of perpendiculaar BN opgericht zyn op den diameeter CD van die zelvde cirkel, en de zelve BN beiderzyds verlengt tot aan den omtrek in de punten N en *n*, zoo men dan door deeze twee lynen AB en NB*n* een vlak laat gaan zal de Keegel-ſneede hier uit voort koomende (zynde NMA*m n*) een *Parabel* of *Brandſneede* genaamd worden.

§. 9. Ten 2e en 3e Zy weeder geſteld (*Fig.* 4 *en* 5) eene Aſſe driehoek CSD van welke de twee zyden CS en DS, geſneede worden door een lyn A*a*, beide beneeden (*Fig.* 4.); of eene booven en eene beneeden den top S (*Fig.* 5.). En men door het punt B daar deeze lyn A*a* den bazis CD van de Aſſe driehoek (verlengt zynde in het vlak van den Cirkel CKD)

Door een Lyn AB

ont-

ontmoet eene lootrechte N'Bn' op de lyn CD trekt; zal de ſneede van het vlak door de lynen AB en N'n' getoogen in den Keegel eene kromme lyn AM*am* (*Fig.* 4.) voortbrengen aan wien de naam van *Elips* op *Langrond* gegeeven is; of (*Fig.* 5.) eene onbepaalde kromme lyn NMA*mn* aan welke de naam van *Hyperbel* of *Waſſende ſneede* gegeeven word,

GEVOLG.

§. 10. Bygevolg zyn 'er maar vyf onderſcheide wyzen om een Keegel te ſnyden, en dus zyn 'er ook maar vyf onderſcheide ſoorten van Keegel-ſneeden. Ten 1e. Is de ſneede altoos een *Driehoek* zoo meenigmaal het ſnydende vlak door den top S gaat (§. 4.). Ten 2e. zal de ſneede een *Cirkel* zyn wanneer het ſnydende vlak paralel of eevenwydig is aan dat van de bazis (§. 7.). Ten 3e. zal het een *Parabel* of *Brandſneede* maaken wanneer de gemeene doorſneede van het ſneidende vlak en dat der aſſe-driehoek paralel is

aan een der opstaande zyden van diezelfde driehoek. Ten 4e Een *Elips* of *Langkrond*; wanneer die gemeene doorsneede de beide zyden van de zelfde asse-driehoek beneeden den top S snyd. En Ten 5e laatstelyk een *Hyperbel* of *Wassende sneede* wanneer die zelfde gemeene doorsneede van het sneydende vlak en de asse driehoek, de beide zyden van dien driehoek den eene booven en den anderen beneeden den top S ontmoet.

Men moet wel acht geeven dat in dit laatste geval het sneydende vlak nog eene diergelyke sneede *Mam* maakt in den teegen overstaanden Keegel; welke met de sneede MA*m* word verondersteld maar eene sneede te maaken; gelyk in 't vervolg blyken zal.

§. 11. *Vierde Bepaalinge*. De lyn AB, gemeene sneede van het sneidende vlak en van dat des assen driehoeks, word de *Diameeter* of *Middellyn* van de kromme lyn MA*m* genaamd; zy ontfangt de naam van *Asse* wanneer den hoek ABN' een rechten hoek is, het geen altoos in een

rech-

rechte Keegel plaats heeft, en nooit in een ſcheeve Keegel gevonden word, dan wanneer de aſſe driehoek lootrecht of rechthoekig op de bazis van den Keegel ſtaat.

Vyfde Bepaaling. De rechte lynen MP, MP &c. uit eenig punt M van de kromme lyn gelykwydig aan BN of BN' tot den diameeter AB getoogen, worden *Ordinaaten* of *Toegepaſten* van de kromme lyn genaamd.

Zesde Bepaaling. De punten A en *a* in welke de Diameeter van de kromme lyn de zyden van den aſſe-driehoek ontmoet, zyn de *Kruinen* van die kromme lyn of de *oorſpronken* van dien diameeter A*a*. Waar uit volgt dat de Parabel niet meer als eene kruin, en zyn Diameeter maar een begin of eenen oorſpronk hebben kan.

Zeevende Bepaaling. De deelen AP of AP en *a*P van den diameeter tuſſchen de oorſpronk of oorſpronken van de zelve en de ontmoeting P van den Ordinaat PM begreepen, werden de *Abciſſen* of *Afgeſneedenen* genaamd; waar uit weeder volgt

volgt dat iedere ordinaat PM in de Parabel niet meer heeft als eene eindige abcisse AP.

II. GRONDLES.

§. 12. *In de Parabel* MAm (Fig 3.) *staan de vierkanten* $\overline{PM}^2$ *en* $\overline{NB}^2$ *der ordinaaten* PM *en* NB *van den diameeter* AB, *tot elkander als hunne abcissen* AP *en* AB *tot elkander staan.*

BETOOGING.

Zy verondersteld dat 'er door de lyn MP een vlak FMG paralel aan de bazis van den Keegel getoogen is wiens sneede een cirkel zal zyn hebbende voor diameeter de lyn FG (§. 7.); En NB ⊥ aan den diameeter CD zynde (door de saamenstelling) zoo is PM die 'er paralel aan is, ook ⊥ op den diameter FG (*g*); bygevolg zyn de lynen MP*m* en NB*n* in twee gelyk gesneeden, in de punten P en B en

(*g*) Eucl. VIII: 11.

en hunne helften naamentlyk PM en BN zyn Ordinaaten van de cirkels FMG en CND; dus zal men voor de eene hebben $\overline{MP}^2 = PF \times PG$ en voor de andere $\overline{NB}^2 = CB \times BD$: by gevolg $\overline{MP}^2 : \overline{NB}^2 = FP \times PG : CB \times BD$ (*b*) of wel (*i*) $\overline{MP}^2 : \overline{NB}^2 = FP : CB$ (deelende de laatste teeden door PG en BD die gelyk aan elkander zyn als begreepen zynde tusschen de eevenwydige lynen AB en DS). Maar dewyl de lynen FP en CB meede paralel aan elkander zyn, zoo zyn de △^{s} CAB en FAP meede ∽ en dus FP: CB = AP: AB; en by gevolg $\overline{MP}^2 : \overline{NB}^2 = AP : AB$ (*k*).

D. B. M. W.

III. GRONDLES.

§. 13. *In de Elips* (Fig. 4.) *en in de Hyperbel* (Fig. 5.), *staan de Vierkanten* $\overline{PM}^2$ *en* $\overline{QN}^2$ *van twee ordinaaten* PM *en* QN

(*b*) Eucl. VII: 5. (*i*) Eucl. XV: 5.
(*k*) Eucl. XI: 5.

QN *aan een zelvde Diameeter* AB *tot elkander, gelyk de producten* AP×aP *en* AQ×aQ *hunner abcissen* AP, aP; *en* AQ, aQ, *tot elkander ſtaan.*

BETOOGING.

Zy geſteld dat door de Ordinaaten PM en QN getoogen worden twee vlakken paralel aan den bazis van de Keegel; dan zullen hunne ſneeden FMG*m* en HNL*n*, cirkels zyn; hebbende voor diameeters de lynen FG en HL (§. 7.): Dewyl nu de lynen NB*n*′ ⊥ op CD ſtaan (door de ſaamenſtelling); Zyn de lynen MP*m* en NQ*n* dewelke aan hen paralel zyn, ook ⊥ aan de diameeter FG en HL; ieder aan de zyne. Dus worden zy 'er ook door in twee gelyk geſneeden (*l*) als meede door den diameeter A*a* van de kromme lyn: Dit geſteld zynde, verkrygt men door middel van de cirkels FMG en HNL deeze vergelykingen $\overline{MP}^2 = FP \times PG$

(*l*) Eucl. III: 3.

$\times PG$ en $\overline{QN}^2 = HQ \times QL$; en bygevolg $\overline{MP}^2 : \overline{QN}^2 = FP \times PG : HQ \times QL$; maar de $\triangle^s$ FAP en QAH zyn $\backsim$ alsmeede de $\triangle^n$ GaP en LaQ om dat hunne bazissen op de paralelle lynen FG en HL staan, en

dus $\left\{ \begin{array}{l} FP : HQ = AP : AQ \ (m) \\ \text{en } GP : QL = aP : aQ \end{array} \right\}$ vermeenigvuldigende deeze eevenreedigheeden met elkander heeft men $FP \times PG : HQ \times QL = AP \times aP : AQ \times aQ$, en by gevolg $\overline{MP}^2 : \overline{NQ}^2 = AP \times aP : AQ \times aQ$ (n).

D. B. M. W.

AANMERKING.

§. 14. In de twee laatste Grondlessen zyn bevat de voornaamste eigenschappen der Keegel-sneeden ten opzichte van hun Assen of Diameeters beschouwt. Men zoude 'er gemakkelyk nog een groot aantal andere eigenschappen van die krom-

(m) Eucl. Def. I: 6. (n) Eucl. XI: 5.

kromme lynen (op dezelfde wyze in het lighaamelyke beschouwt zynde) kunnen afleiden, en zelfs een ieders Vergelyking in den Keegel bepaalen. Doch men heeft zig hier alleen voorgesteld aan te toonen op wat wyze zy in dat lighaam voortgebracht worden. In het vervolg zullen wy ze veronderstellen op een vlak beschreeven te zyn; en uit deeze Beschryvinge welke als eene Bepaaling aangemerkt kan worden, zullen wy die Waarheeden afleiden welke in de *Natuur* en *Sterrekunde* zoo als men die heedendaags onderwyst, noodig zyn; na dat wy in weinig woorden in het slot van dit Hoofdeel verklaart zullen hebben, wat men door de *Vergelyking* van een kromme lyn verstaat.

§. 15. Men noemt *Fonctie* (*fonction*) van een grootheid, dat geene waar in zy verandert na dat zy eenige bewerking ondergaan heeft. By Voorbeeld zoo de grootheid a door m vermeenigvuldigt word, of door b gedeeld; zoo men ze tot eenige macht p verheft, of zoo men 'er de wortel q uittrekt; zullen deeze onder-

scheid-

fcheide analytifche uitdrukkigen naamentlyk *ma*, $\frac{a}{b}$, a^p en $\sqrt[q]{a}$ in welke zy verandert door die bewerkingen, genoemd worden de *Functien* van deeze grootheid *a*; en zoo men deeze functien met elkander paart of met eenige andere grootheeden, het zy door faamenftelling, aftrekking, vermeenigvuldiging of deeling enz; zullen de uitkomften nog *Functien* van die grootheid genaamd worden.

I. Een *Functie* is eene Analytifche uitdrukking of waardy die faamengefteld is uit beftendige en uit veranderlyke grootheeden; deeze waardyen verfchillen van de vergelykingen hier in, dat de onbekenden welke in deeze laatfte gevonden worden of fchoon onderfchillende waardyen hebbende, eevenwel door de oploffing van de vergelyking alle bepaald worden, daar in teegendeel aan de onbepaalde grootheeden een oneindig aantal van waardyen kunnen gegeeven worden. By voorbeeld zoo $az^4-bz^3+cz^2-dz+e=0$. een vergelyking is zal *z* vier waardyen hebben; maar zoo dezelve een *functie* is, heeft *z* een oneindig aantal waardyen.

II. De ftand van een *rechte* of *kromme lyn* in

 alle

alle zyne punten kan niet bepaald worden dan met de betrekking die de onderlinge deelen of punten tot elkander hebben, door twee rechte lynen aan te wyzen. Laat 'er (*Fig.* 41.) een onbepaalde rechte lyn AB gegeeven zyn; het zal niet genoeg ter bepaalinge van alle zyn deelen of punten M zyn, van eene andere rechte AL na gevalle te trekken; maar booven dien zal men genootzaakt weezen eenige lynen MP op die zelve AL te trekken, het zy alle loodrecht, of wel alle paralel aan elkander en maakende een gegeeven hoek met AL: want zoo dan twee lynen AP en PM gegeeven zyn, zal de stand van alle de punten M, M enz. kunnen bepaald worden. Zoo dan die lyn bestendig is, en de betrekking van AP tot PM weegens eenig punt M gegeeven word; zal 'er de stand van een iegelyk ander punt M, (weegens AP beschouwt) afgeleid kunnen worden.

Laat $AP = x$ gesteld worden en $PM = y$ en zy $AP : PM = x : Ky^n$; zoo zal $x : Ky^n = AN : NM$ zyn en $NM = \frac{Ky^n \times AN}{x}$; of $NM \times x = Ky^n \times AN$ stellende dan $AN = a$ en $NM = b$. word dezelve $bx = Ky^n . a$, en zoo K en n beiden $= 1$ gesteld worden, is de vergelyking deeze $bx = ay$.

III. Wanneer $n <$ of > 1 gesteld word, zal de daar uit koomende vergelyking ook van hooger of minder macht zyn als die van de rechte lyn, en by gevolg zullen die ook tot andere dan tot de rechte lynen behooren; waar uit volgt dat

dat de natuur van een lyn het zy dezelve recht of krom is, kan aangeweezen worden, door een vergelyking saamengesteld uit *veranderlyke* (*Abscissen* of *Afgesneedene*, en *Ordinaaten* of *toegepasten* genaamd) en uit bestendige grootheeden.

IV. Dus is de Vergelyking van de rechte lyn $ay = bx$; waar uit blykt dat de voornaamste eigenschap van de rechte lyn hier in bestaat, dat de abscissen in dezelvde reeden aangroeien als de ordinaaten; het welke ooverenkomt met het geene in de gemeene Meetkunst geleerd word, want de Δn APM en ANM gelykvormig zynde maaken dat de lynen AM en AM op elkander vallen (*a*). daar in teegendeel de vergelyking $ay^2 = bx$ (stellende $n = 2$) deeze eevenreedigheid geeft $x : y^2 = a : b$ of $x : y = ay : b$ of wel $x : y = y : \frac{b}{a}$, en stellende $\frac{b}{a} = p$, is $x : y = y : p$, welke een kromme lyns-vergelyking is, gelyk in het verwolg blyken zal.

§. 16. De Wiskunstenaaren veronderstellen en bewyzen dat alle de kromme lynen die *Stelkunstige* genoemd zyn, bepaald kunnen worden door zeekere bestendige eevenreedigheid tusschen eenige

(*a*) Eucl. XXXII: 6.

ge bestendige functien der absciffen en andere der ordinaaten. Ten dien einde kiezen zy gemeenlyk op eene rechte lyn tot welke zy alle de punten van de kromme lyn toepaffen, een zeeker punt A, (*Fig.* 6.) dat zy aanzien als den oorspronk der *meede-ordinaaten* (*Co-ordonnées*) Zy wyzen door x aan, de deelen AP, AP enz. van die lyn, en door y hunne ordinaaten; PM, PM enz; wier neiginge tot AP altoos veronderfteld word bekend te zyn.

De Verschillendheid die 'er tusschen de betrekking der *functien* van x en tusschen die van y is maakt het verschil uit, welk gevonden word plaats te hebben onder de kromme lynen, en welkers aantal oneindig is. De *Analytische* vergelyking die deeze betrekkingen allen bevat, en ze op eene algemeene wyze uitdrukt voor alle de absciffen en ordinaaten; word die *kromme lyns Vergelykinge* genoemd. De *Trap*, *Macht* of *Vermoogen* tot welken die onbepaalde x en y verheeven zyn, bepaald de macht van

de

de vergelyking; (welke altoos gereekend word van die *term* of van dat lid waar in een deezer onbepaalden tot de hoogste macht verheeven is, het zy alleen, het zy door saamenstelling of vermeenigvuldiging vanden eenen met den andere). Iedere byzondere macht maakt een reeks van kromme lynen van de zelvde *Orde*; die nogtans onder een verschillen volgens de onderscheide moogelyke saamenpaaringe der onbepaalden *x* en *y*, voor iedere macht.

Deeze vergelykingen kunnen dienen ter beschryvinge der kromme lynen; maar hun voornaamst gebruik is, van op eene gemakkelyke wyze te kunnen onderscheiden tot wat soort van kromme lynen zy behooren, en 'er de voornaamste eigenschappen van aan de hand te geeven, door het *successivelyk* onderstellen van bekende waardyen voor een der onbepaalden, en dus de andere te bekoomen.

Alzoo wy geene andere kromme lynen dan de Cirkel kunnen veronderstellen

den Beginneren bekend te zyn, zullen wy van de zelve gebruik maaken om op eene gemakkelyke wyze te doen verſtaan het geene zoo eeven gezegt is.

§. 17. Zy gegeeven een Cirkel AMam (*Fig.* 6.) hebbende tot diameeter de lyn *Aa*; laat den oorſpronk der meede-ordinaaten AP, en PM enz. geſteld worden te zyn aan het uiterſte A van den diameeter *Aa*. Zy geſteld $Aa = 2a$, $AP = x$, en $PM = y$, dan zal aP zyn aan $2a - x$. Het is in de Meetkunſt beweezen dat iedere ordinaat PM in de cirkel deeze gelykheid geeft $\overline{PM}^2 = AP \times aP$, en ſtellende in plaats der lynen PM, AP en *a*P, hunne ſtelkundige waardyen, verkrygt men de vergelyking $y^2 = 2ax - x^2$, welke *Cirkels-Vergelyking* genoemd word. Zoo men nu in deeze gelykheid $x = 0$ of $x = 2a$ ſteld, heeft men in 't eene en andere geval $\pm y = 0$: waar uit volgt, dat aan de uiterſtens A en *a* des diameeters *Aa*, de kromme lyn, of twee punten van dezelve met die uiterſtens te ſaamen loopen, of in een ſmelten, wyl de afſtanden

der

der kromme lyn van den diameeter gelyk worden gesteld te zyn aan nul. Zoo $x=a$ gesteld word, is $y^2=a^2$, en by gevolg $y=\pm a$; waar uit volgt dat de afstanden der punten M en *m* (zig nu in de punten B en *b* bevindende), gelyk zyn aan elkander en $=$ CA. De $+a$ wyst de stellige of *positive* ordinaat CB aan, welke booven den diameeter valt, en $-a$ de ontkennende of *negative* C*b* die onder den zelvden diameeter is.

Zoo de absciffe *x* *succesfivelyk* gelyk gesteld word aan zeekere deelen van den diameeter, zal de lengte hunner stellige en ontkennende ordinaaten PM en PM door middel van de Cirkels vergelyking kunnen bepaald worden. By voorbeeld gesteld zynde

$x=\frac{a}{2}$, of $a+\frac{1}{2}a$, zal $\pm y=\pm\frac{a}{2}\sqrt{3}$, zyn

$x=\frac{a}{3}$, of $a+\frac{2}{3}a$, ... $\pm y=\pm\frac{a}{3}\sqrt{5}$

$x=\frac{a}{4}$, of $a+\frac{3}{4}a$, ... $\pm y=\pm\frac{a}{4}\sqrt{7}$

$x=\frac{a}{5}$, of $a+\frac{4}{5}a$, ... $\pm y=\pm\frac{a}{6}\sqrt{9}=\frac{a}{5}$

$\pm\frac{a}{5}\sqrt{9}$

Op dezelve wyze kunnen de waardyen der ordinaaten en hunne absciſſen ook in getallen bepaald worden. Eindelyk zoo x grooter geſteld wierd te zyn als $2a$ of wel gelyk aan eenige ontkennende grootheid, zoude de vergelyking $y^2 = ax - x^2$ niet dan inbeeldige waardyen voor y geeven; het welke aantoont dat geen der deelen of punten van deeze kromme lyn voorby de uiterſtens des diameeters Aa vallen.

Het ſtaat vry den oorſpronk der absciſſen te plaatſen daar men goet vind; zoo by voorbeeld die oorſpronk in het middelpunt C geſteld is, (noemende CP, x en PM, y) zal ieder punt P deeze gelykheid geeven $y^2 = a^2 - x^2$, welke een nieuwe *Cirkels-vergelyking* geeft, van welke nogtans de zelvde eigenſchappen kunnen afgeleid worden.

I. Wyl de Oorſpronk der Absciſſen geſteld kan worden daar men wil; zoo zy getoogen een lyn DE (*Fig.* 42) niet door het middelpunt C gaande, en laat de oorſpronk der absciſſen op het punt D genoomen, en laat de Ordinaat-lyn

DG

DG loodrecht op DE zyn. Zoo men nu uit eenig punt M aan den omtrek van de Cirkel twee rechte lynen Mp en MQ trekt, paralel aan de lynen DG en DE, zullen dezelve meede ordinaaten van het punt M zyn. Men vraagd dan, om de vergelyking welke in dit geval aan zoodaanige ordinaaten toegepaſt kan worden? dewyl de ſtand der lynen DE en DG gegeeven is (§. 17.) zoo zyn de lynen DR en DF meede gegeeven: laat CR of FD$=a$ zyn, CF of DR$=b$, de ſtraal CM$=r$, Dp of MQ$=x$, en Mp of QD$=y$.

Zoo nu de ordinaat tuſſchen den oorſpronk der abſciſſen en het middelpunt C valt, is $MP = Mp - pP = Mp - CR = y - a$, en $CP = CF - FP = b - x$; maar $\overline{CM}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PC}^2 = (y-a)^2 + (b-x)^2 = r^2$ of $y^2 - 2ay + a^2 + b^2 - 2bx + x^2 = r^2$. welk weederom een nieuwe vergelyking van de cirkel is.

De vergelyking is eeven de zelvde, wanneer de ordinaat aan de andere kant van het middelpunt C valt, het eenige verſchil is, dat, dan $PC = FP - CF = x - b$ is, welke in 't vierkant geſteld zynde eeven dezelvde vergelyking geeft.

Om de waardyen der ordinaaten in deeze gevallen te bepaalen, moet deeze vergelyking verſchikt worden op de volgende wyze, $y^2 - 2ay + a^2 = r^2 - x^2 + 2bx - b^2$ en beiderzyds de Vierkants-wortel neemende heeft men $y - a = \pm \sqrt{r^2 - x^2 + 2bx - b^2}$ en dus

$$y = a \pm \sqrt{r^2 - x + 2bx - b^2}$$

II. In de navorſinge der kromme lynen is

men gewoon dezelve in verschillende *Classen* of *soorten* te onderscheiden, naa maate hunne vergelykingen van hoogere, of mindere machten zyn, (§. 16.) en om dit te kunnen doen, zal het noodig zyn te doen zien, dat de vergelyking van een kromme lyn, altoos dezelvde macht behoud, wat verandering of verplaatzing 'er ook gedaan worden aan den As of aan den oorspronk der abscissen. want Ten 1ste. zoo men in de laatste voorgaande Cirkel (*Fig.* 43.) den oorspronk der abscissen agterwaarts op het punt S stelde te zyn, op een tusschen wyte $=g$, zoude de nieuwe abscisse x gelyk zyn aan $Dp+DS$; en stellende $Dp=z$, zoude $x=z+g$ zyn. Ten 2e. zoo de oorspronk der abscissen voorwaarts gebragt word tot op het punt e met dezelvde tusschenwyte $=g$ is de nieuwe abscisse $x=Dp-De=z-g$ (stellende $Dp=z$).

Ten 3e. wanneer DE eens paralel aan zig zelve tot in Fa verschooven word, zullen de abscissen dezelvde blyven, maar de ordinaaten zullen korter worden; zoo dan de tusschenwyte tot van den eersten as DE en deezen nieuwen Fa gelyk aan d gesteld word, zal de ordinaat $y=Mp-pP=v-d$ zyn, (stellende $MP=v$).

Ten 4e. zoo de As DE (*Fig.* 44.) op de zelvde wyze naar de andere kant in *fq* verzet wierd, met ook eene tusschenwyte gelyk aan d, zoude de abscissen dezelvde blyven, maar de ordinaat y zal in dit geval gelyk zyn aan $v+d$. (stellende $Mp=v$).

Zoo

Zoo men nu deeze vier gevallen op de Vergelyking $y^2 = a \pm \sqrt{r^2 - x^2 + 2bx - b^2}$ toepast, zal dezelve wel van gedaante veranderen, maar evenwel altoos een vergelyking van dezelfde macht blyven, en by gevolg altoos de zelfde soort van kromme lynen aanduiden.

III. Zoo de nieuwe genoomen As DH (*Fig.* 45) een hoek EDH met den As DE maakte, in het punt D, daar de oorsprong der absciffen genoomen is; zoo trekt uit het punt M op den nieuwen As DH eene ordinaat $Mr = v$, en steld de absciffe $Dr = t$. Laat m de *Sinus* of *Hoekmaat* en n de *Cosinus* of *meede-Hoekmaat* van den hoek EDH zyn; en neemende de eenheid voor Straal zal $m^2 + n^2 = 1$ zyn. Vervolgens trekt uit het punt p twee loodrechten ps en pk op de nieuwe meede-ordinaaten: dewyl nu $Dp = x$ is, heeft men deeze eevenreedigheid $1 : m = Dp : pk$ of wel $1 : m = x : mx = pk = sr$. Op dezelve wyze is $Dk = nx$; alzoo de hoeken pMr en pDr aan elkander gelyk zyn; en dat $Mp = y$ gesteld is, zal $rk = my$ zyn en $Ms = my$; bygevolg $Dr = t = Dk - rk = nx - my$, en $Mr = v = Ms + sr = mx + ny$; en dus is $nt + mv = n^2x + m^2x$, en $x = \frac{nt + mv}{m^2 + n^2} = \frac{nt + mv}{1} = nt + mv$.

Op dezelvde wyze is $nv - mt = n^2y + m^2y$ en $y = \frac{nv - mt}{m^2 + n^2} = nv - mt$.

Zoo

Zoo dat in dit geval de Cirkels Vergelyking weeder gelykvormig zal zyn aan de voorgaande.

IV. Indien aan den nieuwen As LN (*Fig.* 46.) eenige anderen ſtand gegeeven word; zoo laat het punt L voor den oorſpronk der abſciſſen genoomen worden, en zy uit het punt M op deezen nieuwen As LN eene loodrechte Mb getoogen, die wy v noemen zullen. Zy L$b=t$; recht uit het punt L eene loodrechte Ld op den ouden As DE verlengt tot in D; maakt D$d=f$, L$d=g$, en trekt door het punt L eenen As LR paralel aan den ouden As DE, die de verlengde ordinaat Mp in het punt q ontmoet; dus is Mq $=y+g$ (om dat $pq=$ Ld is); en L$q=$D$p+$Dd is$=x+f$. Laat m de *Sinus* en n de *Coſinus* van den hoek qLb zyn, en ſteld de Straal$=1$. trekt de meede-ordinaaten $q\alpha$ en $q\beta$. Wyl nu de hoeken qMb en qLb aan elkander gelyk zyn, heeft men als vooren $q\beta=\alpha b=mx+mf$; L$\beta=nx+nf$; $q\beta=b\alpha=my+mg$ en M$\alpha=ny+ng$. Bygevolg is L$b=t=nx+nf-my-mg$ en M$b=v=mx+mf+ny+ng$; vermeenigvulgende dan t en zyn waardy door n; v en zyn waardy door m, vind men $nt=n^2x+v^2f-nmy-nmg$, en $mv=m^2x+m^2f+nmy+nmy$; tellende deeze vergelykingen tot elkander heeft men $mv+nt=m^2x+m^2f+n^2x+n^2f$ of $mv+nt=(m^2+n^2)(x+f)$. Maar $m^2+n^2=1$ dus $mv+nt=x+f=$Lq.

Vervolgens vermeenigvuldigende t en zyn waardy door m; v en zyn waardy door n, heeft

C men

men $mt = mnx + mnf - m^2y - m^2g$, en $nv = mnx + mnf + n^2y + m^2g$, en trekkende deeze van elkander is $nv - mt = n^2y + n^2g + m^2y + m^2g = (m^2 + n^2)(y+g) = y + g = Mq$.

V. Wy hebben tot hier toe gesteld dat de ordinaaten rechthoekig op de absciſſen ſtonden, doch het zoude geen verandering in de vergelyking geeven of ſchoon de ordinaaten een ſcherpen, of een plompen hoek met den As maakten: als by voorbeeld, (*Fig.* 47.) zy geſteld de rechthoekige abciſſe $DP = x$ en haare ordinaat $PM = y$, de nieuwe abciſſe $DQ = t$; haare hellende ordinaat $MQ = v$: de *Sinus* van den hoek $MQD = m$; zyn *Coſinus* $= n$. Dan geeft de $\triangle PQM$ deeze eevenreedigheid $1 : v = m : y$ of $y = mv$; en $1 : v = n : t - x$ of $x = t - nv$.

VI. Eindelyk zoo de vergelyking van eene kromme lyn weegens zyne rechthoekige meede ordinaaten bepaald is, kan men op dezelvde wyze de vergelyking voor een iegelyke ſtand der zelver op de algemeenſte wyze bepaalen: Laat weederom $DP = x$ zyn, en $PM = y$; (*Fig.* 48.) neemt een As AQ naa gevalle, en een punt A in denzelve voor den oorſpronk der absciſſen; trekt nog uit het punt M een ordinaat MQ naar gevalle, maakende met den nieuwen As een hoek MQA, wiens *Sinus* wy gelyk aan p. en wiens *Coſinus* wy gelyk aan q ſtellen. Recht uit het punt A een lyn AB op, loodrecht ſtaande op den ouden As

DP

DP; ſteld AB$=g$ en BD$=f$; trekt AR paralel aan den ouden As; en ſteld de *Sinus* van den hoek CAQ$=m$, en zyn *Coſinus*$=n$; vervolgens trekt MF loodrecht op den nieuwen as AQ; ſteld MF $=v$, AF$=t$, AQ$=r$ en QM$=s$; dus heeft men door het voorgaande $t=r-qs$; $v=ps$; $x=mv+nt-f$ en $y=nv-mt-g$, waar in de waardyen van t en v geſteld zynde, heeft men $x=mps-nqs+nr-f$ en $y=nps+mqs-mr-g$.

VII. Zoo in alle deeze voorvallen de waardyen voor x en voor y gevonden, in de kromme lyns vergelyking geſteld worden, zal deszelfs gedaante wel veranderen, maar geenzints deszelver macht; waar uit dan volgt dat de Vergelykingen van verſchillende machten tot het zelvde Geſlagt of Soort van kromme lynen niet behooren kunnen, doordien hunnen aart alleen afhangt van de verſchillende betrekkingen of machten die 'er tuſſchen de veranderlyke x en y of tuſſchen de abſciſſen en ordinaaten zyn (§ 16); daarom heeft men ook de Geſlagten derzelver verdeeld volgens de grootſte ſom der Exponenten van x en y.

Dierhalven zullen de kromme lynen wiers Vergelykingen deeze volgende gedaante hebben, tot de derde Macht of het derde Geſlagt behooren. Naamentlyk

$$y^3+bxy-ax^2+b^3=0$$
$$xy^2+bxy-ay^2-c^3=0$$
$$x^3+abx-axy+c^3=0$$

De rechte lyn is van het eerste geslagt, om dat haar vergelyking deeze is *ay=bx*. De Keegelsneeden zyn van het tweede geslagt om dat zy vierkants-vergelykingen hebben, gelyk in 't vervolg getoont zal worden.

VIII. Meenigmaal gebeurt het, dat een vergelyking de Saamenstelling van verschillende lynen aanduit; dat is te zeggen dat eene en zelvde vergelyking meenigmaal de saamenlooping aantoont van verschillende kromme lynen die alle op het zelvde Vlak beschreeven zyn, en in dit geval, is die vergelyking een *product* van verschillende *rationaale* of *meetbaare* vergelykingen, die elk in 't byzonder vergelykingen zyn van eene kromme lyn welke met de ander een en zelvden as, en eenen oorspronk voor hunne abscissen hebben, want zoo men verscheiden vergelykingen door elkander vermeenigvuldigt, zal de uitkoomende voor wortels hebben alle de wortels van de vergelykingen die tot voortbrenging van deeze gedient hebben, en ieder der wortels een tak of deel van eene krommelyn aanwyzende, (volgens §. 16.) zoo zal het gezegde product ook eene kromme lyn aanwyzen die alle de takken heeft van de vergelykingen die tot saamenstelling van deeze gedient hebben: dat is te zeggen, zy zal een geheel Saamenstel van kromme lynen aanduiden. By voorbeeld; (*Fig*. 49.) zoo twee gelyke Cirkels op het zelvde Vlak beschreeven zyn, en dat het middelpunt C

van

van de eene Cirkel DRQN voor den oorsprong der abscissen genoomen word, (de meede-ordinaaten rechthoekig op elkander staande) zoo zullen de omtrekken der beide Cirkels DRQN en MSLE aangeweezen worden door deeze vergelyking; (die te saamen gesteld is uit die van §. 17 en N°. I.)

$$(y^2 - 2ay + a^2 + b^2 - 2bx^2 - r^2)(y^2 + x^2 - r^2) = 0$$

of

$$\begin{array}{lll} y^4 - 2ay^3 & + 2x^2y^2 - 2ax^2y & + x^4 = 0 \\ & - 2bxy^2 + 2ar^2y & - 2bx^3 \\ & + a^2y^2 & + a^2x^2 \\ & + b^2y^2 & + b^2x^2 \\ & - 2r^2y^2 & - 2r^2x^2 \\ & & + 2br^2x \\ & & - a^2r^2 \\ & & - b^2r^2 \\ & & + r^4 \end{array}$$

Deeze vergelyking kan nog op de volgende wyze aangeweezen worden.

$(y - a - \sqrt{r^2 - b^2 + 2bx - x^2}) \times (y - a + \sqrt{r^2 - b^2 + 2bx - x^2}) \times (y - \sqrt{r^2 - x^2}) \times (y + \sqrt{r^2 - x^2}) = 0$, zynde de vier wortels van de vergelykingen $(y^2 - 2ax + a^2 + b^2 - 2bx + x^2) \times (y^2 + x^2 - r^2) = 0$ gelyk reeds getoond is.

Hier volgt nu uit, dat iedere absciffe CP $= x$ vier ordinaaten heeft, naamentlyk PM, Pq, Pp en Pm, ten zy het punt P tusschen C en E, of tusschen Q en L valt, in welk geval 'er twee inbeeldig worden.

De wortel $y - a - \sqrt{r^2 - b^2 + 2bx - x^2} = 0$ wyst de Cir-

Cirkelſtuk E M S L aan; de wortel $y - a + \sqrt{r^2 - b^2 + 2b^2x - x^2} = o$ het Cirkelſtuk L*p*E; de wortel $y - \sqrt{r^2 - x^2} = o$ de halve Cirkel DRQ; en de wortel $y + \sqrt{r^2 - x^2} = o$ de halve Cirkel Q*m*ND. De wortels van de gegeeve vergelyking toonen dan te gelyk de omtrekken der beide Cirkels EMSL en DRQN.

VIII. Hier uit blykt, dat zoo meenigmaal een Vergelyking gedeeld kan worden in twee, drie of meer andere, alle *rationaal* of *meetbaar* zynde, (naamentlyk wanneer die uitkoomende vergelykingen door geen wortel-teekens in haare veranderlyken aangedaan worden). zoo is de lyn die door de gegeeve ſaamengeſtelde Vergelyking aangeduid wôrd, een Saamenſtelling van verſcheide lynen; maar wanneer eene gegeeve Vergelyking geen meetbaare deelders heeft, dan is de lyn die zy aanduid niet ſaamengeſteld uit andere maar is een lyn op zig zelven.

By voorbeeld de Vergelyking $y - \sqrt{r^2 - x^2} = o$ toont alleen de halve Cirkel DME aan; (*Fig.* 50) zoo men nu het wortel-teeken wilde wegneemen met die Vergelyking in 't vierkant te ſtellen, is die $y^2 + x^2 - r^2 = o$, die behalven de wortel $y - \sqrt{r^2 - x^2} = o$ nog de wortel $y + \sqrt{r^2 - x^2} = o$ bevat; welke laatſte wortel de andere halve Cirkel E*m*D aanwyſt.

Het is dan niet moogelyk de eene halve Cirkel door een meetbaare Vergelyking aan te wyzen zonder het de andere halve Cirkel E*m*D meede te doen.

Dit is nu het waare grond-begintzel der *Meetkunstige Plaatzen.*

IX. Door *Meetkunstige Plaatzen* verstaat men de Meetkunstige saamenstellinge van een Vergelyking die hooger als de tweede macht is, of die twee veranderlyke in zig bevat.

Wy hebben niet goed gedagt de *Leere* dier Plaatzen hier by te voegen om dat zy eer Konstryk dan Nuttig zyn; want al gebruikt men nog zoo veel oplettenheid in het beschryven van een kromme lyn, zal men eevenwel nooit zoo volmaakt de gezochte grootheid kunnen bepaalen, als het door de bereekening in getallen geschied.

De Heer Marquis de l'Hopital heeft byna niets van aanbelang overgeslaagen in zyne Leere over die Plaatzen, in zyn *Traité Analytique des Sections Coniques.*

** Wy zullen hier eene algemeene aanmerking doen op alle de kromme lynen die door vergelykingen uitgedrukt worden; naamentlyk, dat de oorspronk der meede-ordinaaten altoos van een punt op de kromme lyn gereekend word, wanneer alle de termen van de Vergelyking aangedaan zyn door de veranderlyken x of y. En in teegendeel is 'er altoos eene bestendige term in de Vergelyking, wanneer die

die oorſpronk der meede-ordinaaten buiten of binnen den omtrek van de kromme lyn valt.

Om hier van overtuigt te zyn, zoo laat 'er gegeeven zyn de algemeene Vergelyking $ax^m + bx^p y^q + cy^n = o$; het is klaarblykelyk dat zoo in deeze Vergelyking $x = o$ geſteld word, zal cy^n meede $= o$ zyn, of $y = o$; en by gevolg is de oorſpronk der meede-ordinaaten op den omtrek van de kromme lyn. Op dezelvde wyze wanneer $y = o$ geſteld word, is ax^m meede $= o$ en dus $x = o$, het welke op 't zelvde uitkomt als in 't eerſte geval. Maar zoo de Vergelyking eenige beſtendige termen heeft, als $ax^m + bx^p y^q + cy^s - g^n = o$ en men $x = o$ ſteld vind men $cy^s - g^n = o$, en dus $y^s = \frac{g^n}{c}$ of $y = \sqrt[s]{\frac{g^n}{c}}$; het geene aantoont, dat het punt M aan de kromme lyn van den oorſpronk der x afſtaat met eene tuſſchenwyte $= \sqrt[s]{\frac{g^n}{c}}$, en bygevolg dat die x niet op de kromme lyn is.

De zelvde waarheid heeft plaats zoo men $y=o$ ſteld, in welk geval $x=\sqrt[m]{\frac{g^n}{a}}$ zal zyn.



TWEEDE HOOFTDEEL.

Van de Eigenſchappen der Parabel of Brandſneede; als op een Vlak beſchreeven zynde, beſchouwd.

BEPAALINGEN.

§. 18. *Zy gegeeven eene onbepaalde rechte lyn* RS (Fig. 7.) *die wy* Leidslinie (Directrice) *zullen noemen, en op dat zelvde Vlak een punt F buiten die rechte lyn* RS, *dat* Focus *of* Brandpunt *genoemd word. Zoo men een oneindig getal punten* M *op dat Vlak neeme, zoodaanig dat de lynen* FM *en* MQ *die uit dit punt* M *getoogen worden de eerſte (naamentlyk* MF) *tot in het* Focus F. *en de tweede (naamentlyk* MQ) *loodrecht op de Leidslinie, beide dan*

aan elkander gelyk zyn, zal de kromme lyn die door deeze punten getoogen word, een Parabel of Brandsneede *genaamd worden.*

I. VRAAGSTUK.

§. 19. *De gegeeven Bepalinge van de Parabel gesteld zynde, deeze kromme lyn te beschryven, of het geene op 't zelvde uitkomt, zoo een groote meenigte van punten M te vinden als men begeert,*

OPLOSSING.

Laat uit het punt F eene loodrechte FB, op de Leids-linie (Directrice) RS vallen (*a*) en, verlengd dezelve na de kant van P, richt uit FB eenige loodrechten PM, en PM op na gevallen, en verlengt dezelve tot in de punten *m* en *m*; uit het punt F als middelpunt beschryft met een straal FM=BP, een Cirkel-

(*a*) Eucl. XII: 1.

kel-boog die de *Correspondeerende* onbepaalde rechte lyn m PM snyden zal in twee punten M en m, welke de twee punten zyn zullen waar door de parabel getoogen moet worden.

Op dezelvde wyze voortgaande kan men zoo veel zoodanige punten m en M vinden als 'er begeerd worden.

BETOOGINGE.

Laat uit het punt M een ⊥ MQ op de Leids-linie RS vallen; dan heeft men MQ=BP, om dat BPMQ een rechthoek is; (b) maar BP is=FM (door de Oplossing) by gevolg is MQ ook= FM; en het punt M is aan de parabel volgens §. 18.

D. T. B. W.

I. GEVOLG.

§. 20. Uit deeze beschryving en uit §. 18. volgt, dat de parabel door het mid-

(b) Eucl. XXXIV: 1.

midden van de lyn *BF* gaat, dewyl in dat ſtip BA gelyk aan AF is.

II. GEVOLG.

§. 21. Hier uit volgt nog, dat deeze kromme lyn twee oneindige takken heeft, (naamentlyk AMM en A*mm*) welke geſtaadig van AP verwyderen, en in een gelyken afſtand van deeze lyn geplaatſt zyn, en dat de lyn AP de geheele kromme lyn *m* AM in twee gelyke deelen deelt.

BEPAALINGEN.

§. 22. De lyn AP word *As* genaamd; het punt A. midden van BF is de *Kruin*: een iegelyke reehte lyn MP getoogen uit eenig punt M, van de kromme lyn, loodrecht op den as AP, word *Ordinaat* van dien as genoemd. Het deel AP van den as, dat tuſſchen de ordinaat MP en de kruin A van de kromme lyn geleegen is, is de *Abſciſſe* van die ordinaat; en men

geeft de naam van *Parameeter* aan een lyn welke het dubbeld is van BF.

EERSTE GRONDLES.

§. 23. *In de Parabel* (Fig. 7.) *is het Vierkant* $\overline{PM}^2$ *van een iegelyke ordinaat* PM, *gelyk aan het product van de absciſſe* PA *door den parameeter.*

BETOOGINGE,

Laaten de bekende lynen AF of *AB* gelyk geſteld worden aan *a*, en de parameeter (zynde het dubbeld van BF) die wy *p* zullen noemen, zal gelyk zyn aan $4a$; ſteld $AP = x$ en $PM = y$; wanneer het punt P tuſſchen den kruin A en het *Focus* F valt, zal $FP = a - x$ zyn; en in teegendeel is $PF = x - a$ wanneer het punt P aan de andere kant, of voorby het *Focus* F valt; dit geſteld zynde heeft men in de beide gevallen (om dat de △ FMP rechthoekig is) $\overline{PM}^2 = \overline{FM}^2 - \overline{FP}^2$; maar FM is $= BP = a + x$, (§. 18.) ſtel-

ſtellende dan voor deeze lynen haare ſtelkundige waardyen, verkrygt men $y^2 = a^2 + 2ax + x^2 - a^2 + 2ax - x^2 = 4ax$ of px; dewyl p = is aan $4a$.

D. T. B. W.

EERSTE GEVOLG.

§. 24. Hier uit volgt, dat de vierkanten der ordinaaten tot elkander ſtaan als haare abſciſſen; want zy geſteld dat y een ordinaat is, en x haar abſciſſe; en laat Y eene andere ordinaat zyn, hebbende X voor abſciſſe; dan heeft men voor de eerſte $y^2 = px$, en voor de tweede $Y^2 = pX$, en bygevolg $y^2 : Y^2 = px : pX = x : X$ (c). deelende de beide termen van de laatſte reeden door hunne gemeenen werker p.

II. GE-

(c) Eucl. VII: en XVI. 5.

II. GEVOLG.

§. 25. Uit de Vergelyking $y^2 = px$ verkrygt men $p : y = y : x$; by gevolg is een iegelyke ordinaat midden eevenreedige tusschen haare absciffe en de parameeter; waar uit volgt dat zoo 'er twee van deeze drie lynen gegeeven zyn, (naamentlyk de parameeter, eene ordinaat en haare absciffe) de derde dan ook bekend zal worden.

III. GEVOLG.

§. 26. Daar volgt nog uit, dat de dubbelde ordinaat die door het Brandpunt F gaat, gelyk is aan den parameeter; want in dit geval is de absciffe AP of x gelyk aan AF of $= \frac{1}{4}p$ (§. 22 en 23) en by gevolg $y^2 = \frac{1}{4}p^2$ of $2y = p$.

GRONDLES.

Zoo men door eenig punt D *aan de parabel* (Fig. 55.) *een Diameeter* DN *evenwydig aan den As* AP *trekt, de dubbelde Asse-ordinaat* MPm *in het punt* N *ontmoetende, zoo is* NM×Nm=DN×p.

BETOOGING.

Trekt de ordinaat DS. Dewyl AS×p=$\overline{SD}^2$ is, en AP×p=$\overline{Pm}^2$ (§. 23.) zoo is (AS+AP) p=$\overline{SD}^2+\overline{Pm}^2$ en (AP--AS) p=$\overline{Pm}^2$---$\overline{SD}^2$; maar AP--AS is=SP, dus SP×p=$\overline{Pm}^2$---$\overline{SD}^2$, nu is Pm=PM, SP=DN en SD=PN; bygevolg is SP ×p=DN ×p=$\overline{MP}^2$---$\overline{PN}^2$ en $\overline{MP}^2$---$\overline{PN}^2$ is= (PM+PN) (PM--PN), PM+PN is=NM, en PM--PN of Pm--PN=Nm; by gevolg NM× Nm=DN ×p.

D. T. B. W.

II. VRAAGSTUK.

§. 27. *Door eenig gegeeven punt* M (Fig. 8.) *op de parabel, een raaklyn aan die kromme lyn te trekken.*

OP-

OPLOSSING.

Trekt een lyn MF uit het gegeeven punt M tot in het *Focus* F, en op de Leids-linie Q*q* een ⊥ MQ; vervolgens ook FQ; zoo men nu door het midden D van deeze lyn FQ en het punt M, eene rechte MD trekt, zal dezelve de parabel in het punt M aanraaken.

BETOOGINGE.

Laaten 'er uit eenig ander punt *m* van die lyn, getoogen zyn, de lynen *m*F en *m*Q, als meede eene *mq* ⊥ op de Leids-linie *q*Q.

Door de Saamenſtelling is de rechte lyn MD ⊥ op het midden van QF dewyl MF = MQ (§. 18) en FD = QD is; by gevolg gaat de rechte lyn MD door alle de punten eevenwydig van F en Q; dies is *m*F = *m*Q; maar *mq* is < *m*Q (*d*) en by gevolg is *mq* ook < *m*F; dier-

(*d*) Eucl. XIX: 1.

dierhalven is het punt M niet aan den omtrek der parabel (volgens §. 18). Doordien nu het zelvde bewys altoos plaats heeft voor alle andere ſtippen in die lyn MD behalven voor het ſtip M, is het klaarblykelyk dat dit ſtip M het eenigſte is dat dezelvde eigenſchap heeft als de kromme lyn, en by gevolg is MD een raaklyn in dat punt.

D. T. B. W.

I. GEVOLG.

§. 28. Zoo de raaklyn MD naar de kant van D verlengt word tot zy den verlengden as FAB in het punt T ontmoet, zal het deel PT van dien as, (geleegen tusſchen T en het uiterſten P van de ordinaat MP die door het raakpunt getoogen is) het dubbeld zyn der absciſſe AP van die zelvde ordinaat MP: want door de ſaamenſtellinge is de ∇FMD= ∇DMQ; maar de ∇DMQ is=∇FTM om dat FT en QM eevenwydig

aan

aan elkander zyn (*e*); dus is de △FMT gelykbeenig, en FT is = FM (*f*); maar FM is = MQ (§. 18.), en MQ = BP (*g*); dus is FT = BP; zoo 'er van deeze gelyke lynen de gelyken AB en AF afgetrokken worden, zal AT = AP zyn; waar uit volgt dat PT = 2 AP is.

Men heeft deeze PT de naam gegeeven van *Onder-Raaklyn* (*Soutangente*), noemende dan AP, x, zal de onder-raaklyn = $2x$ zyn.

II. GEVOLG.

§. 29. Hier uit volgt nog, dat indien men uit het punt M op de raaklyn MDT eene loodrechte MR opricht, en dezelve verlengt tot in het punt R van den As AP, zal het deel RP van dien as (*Onder-Loodlyne* genaamd) gelyk zyn aan den halve parameeter; want de △△ RPM en FBQ zyn regthoekig, gelyk-

(*e*) Eucl. XXIX: 1. (*f*) Eucl. VI: 1.
(*g*) Eucl. XXXIV: 1.

lykvormig en gelyk, dewyl zy gemaakt zyn door de eevenwydige lynen FQ, MR; BQ en PM; dus heeft men PR$=$BF$=2a$ of $\frac{1}{2}p$; waar uit volgt dat de onder-loodlyn in de parabel, eene bestendige grootheid is die altoos gelyk is aan de halve parameeter. Deeze Waarheid is ook een gevolg uit het geleerde noopens den rechthoekigen Δ TPM, welke deeze eevenreedigheid geeft PT of $2x$: PM of y=PM of y: PR of $\frac{y^2}{2x}$= of $\frac{px}{2x}$=$\frac{1}{2}p$.

III. GEVOLG.

§. 30. Wanneer de onder-raaklyn PT en de onder-loodlyn RP bekend zyn, zal het gemakkelyk zyn de Analytische waardyen van de raaklyn MT en van de loodlyn MR te bepaalen: want de rechthoekige Δ M T P geeft MT$=$ $\sqrt{px+4x^2}$, en de Δ MPR, MR$=$ $\sqrt{px+\frac{1}{4}p^2}$ of $\sqrt{(x+\frac{1}{4}p)p}$ of $\sqrt{(4x+p)\frac{1}{4}p}$, en by gevolg, MT: MR$=\sqrt{px+4x^2}$:

$\surd$

$\sqrt{(p+4x)\frac{1}{4}p} = \sqrt{x} : \frac{1}{2}\sqrt{p}$; (*b*) deelende de beide termen der laatste reeden door $\sqrt{p+4x}$.

IV. GEVOLG.

§. 31. Zoo men de rechte MQ tot binnen de parabel naar E verlengt, zyn de hoeken FMD en EML aan dezelve zyde van de raaklyn, door de lynen ME en MF, gemaakt, zigtbaarlyk aan elkander gelyk; want, door de Saamenstelling is de $\angle$FMD = aan $\angle$DMQ: maar $\angle$DMQ is = $\angle$EML om dat zy schrikshoeken zyn (*i*); by gevolg $\angle$FMD = aan $\angle$EML, waar uit volgt dat indien in een parabel, of in de holligheid van een parabolisch lighaam (welker oppervlakte of omtrek gemaakt is door de omwen-

(*b*), $px + 4x^2$ is $= (p+4x)\,x$ en $\sqrt{(p+4x)} \times \frac{1}{4}p = \sqrt{(p+4x)} \times \sqrt{\frac{1}{4}p}$; $\sqrt{\frac{1}{4}p}$ is $= \frac{1}{2}\sqrt{p}$; en by gevolg zyn de termen $\sqrt{px+4x^2} : \sqrt{(p+4x)\frac{1}{4}p}$ = aan $\sqrt{p+4x} \times \sqrt{x} : \sqrt{p+4x} \times \frac{1}{2}\sqrt{p}$.

(*i*) Eucl. XV: 1.

wenteling van deeze kromme lyn rondom zyn as) 'er gelykwydige ſtraalen vallen, zy alle door den omtrek in het Brandpunt, weeder gekaatſt en verzaameld zullen worden. Dit is een noodzaakelyk gevolg van de gelykheid der hoeken FMD en EML, en van de wetten der *veerkragts lighaamen* (*corps élaſtiques*); en omgekeerd, zoo het Brandpunt F verligtend is, zullen alle de Straalen uit dit punt gaande, en aan de binnenſte oppervlakte van de kromme lyn ſtootende, gelykwydig aan den as weeder gekaatſt worden. Het is uit hoofde van deeze eigenſchappen dat aan dit punt F de naam van *Focus* of *Brandpunt* gegeeven word.

BEPAALINGE.

§. 32. Wy zullen in 't vervolg *Voerſtraal* (*rayon vecteur*) noemen, een iegelyke rechte lyn MF, getoogen uit het Brandpunt tot eenig ſtip M aan de kromme lyn.

GRONDLES.

I. *De Voerstraal* FM (Fig. 51.) *is gelyk aan de som van de abscisse* AP *der ordinaat die door het punt* M *gaat en het vierde deel des parameters; dat is* FM=AP+$\frac{1}{4}$p.

BETOOGINGE.

AT is=AP (§ 28) en dus AF+AT=AF+AP of TF=AP . AF; maar FT is=FM (door de betooging in § 28.) dus FM=AP+AF, en AF=$\frac{1}{4}$p (§. 26.) by gevolg is de Voerstraal Fm gelyk aan de onderleggende abscisse AP+$\frac{1}{4}$p.

D. T. B. W.

GEVOLG.

II. Dewyl FM=AP+AF is, en AP=AF+FP, zoo is FM=FP+2AF.

GRONDLES.

III. *Het verschil* AQ--AP=PQ (Fig. 52.) *van twee abscissen* AQ *en* AP *is gelyk aan het verschil haarer Voerstraalen* FN *en* FM; *dat is te zeggen* FN--FM *is*=PQ.

BE-

BETOOGINGE.

FN--FM is=AQ+AF--AP--AF=AQ--AP =FQ.

D. T. B. W.

VRAAGSTUK.

IV. *Gegeeven zynde twee Voerstraalen* FM *en* FN (Fig. 53.) *met den hoek* MFN *tusschen dezelve begreepen; de Parabel te beschryven.*

OPLOSSING.

Maakt een △FMN met de twee gegeeven lynen FM en FN, en den ∀MFN, beschryft op MN een halve cirkel MqTN; past in die halve cirkel de lyn MT, die het verschil is tusschen de twee gegeeven Voerstraalen; trekt NT en verlengt dezelve onbepaaldelyk naar de kant van Q; laat een loodlyne FQ uit het punt F op de lyn NQ, vallen, en verlengd dezelve beiderzyds; eindelyk maakt $AF = \frac{FN-FQ}{2}$, en het punt A zal de kruin van de gevraagde Parabel zyn, en de lyn AQ haare as.

BETOOGINGE.

Dewyl AF=is aan $\frac{FN-FQ}{2}$, zoo is FN=2AF+FQ; maar FA+FQ is=AQ, dus is FN=AQ+AF. Op dezelvde wyze betoogd men dat FM=AP+AF is. Maar FN en FM zyn Voerstraalen; bygevolg is F het Brandpunt, A de kruin, en M en N twee punten aan de Parabel.

D. T. B. W.

De *Heer Zanotti* heeft door middel van dit Vraagstuk, eene beknopte wyze uitgevonden om de Comeeten te bereekenen; dezelve is te vinden in *Comment. instituti Bononiensis Vol.* 3. *Part. I.*

II. GRONDLES.

§. 33. *Indien 'er eenige onderscheiden raaklynen* (gelyk MT.) (Fig. 8.) *aan verscheiden punten van de kromme lyn getoogen zyn, en men uit het Brandpunt* F *op een ieder van de zelve eene loodrechte lyn* FD *laat vallen; zullen deezen loodregten aangroeijen eeven als de vierkants-wortels van ieder haar eige Voerstraal.*

BETOOGINGE.

Zoo men door de punten A en D, de rechte AD trekt, is het zichtbaar dat die lyn eevenwydig zal zyn aan de Leidslinie BQ, dewyl zy de zyden BF en QF, beiden in twee deeld; dus zyn de rechthoekige Δ^{n} F A D en F D T aan elkander ∽, hebbende de ∀ F gemeen, en geeven FA : FD = FD : FT welke FT = aan FM is (§. 28.) by gevolg $FA \times FM = \overline{FD}^2$; zoo men eene andere F*d* en F*m* veronderstelde, zoude men op de zelvde wyze betoogen dat $FA \times Fm$ = was aan $\overline{Fd}^2$; dus $\overline{FD}^2 : \overline{Fd}^2 = FA \times FM : FA \times Fm = FM : Fm$, en trekkende de vierkants-wortels $FD : Fd = \sqrt{FM} : \sqrt{Fm}$.

D. T. B. W.

BEPAALINGEN.

§. 34. Een iegelyke rechte lyn MQ of MK (*Fig.* 9.) getoogen door een punt

M van de parabel, eevenwydig aan den as van die kromme lyn, word *Diameeter* genaamd, en het punt M, deszelfs *Oorspronk*. Een iegelyke rechte NQ, welke eevenwydig is aan de raaklyn die door het punt M gaat, en bepaald word aan de eene zyde door de kromme lyn in N, en aan de andere door den diameeter MK in Q; is een *Ordinaat* van dien diameeter. Men noemd *Abscissen* die deelen van den diameeter welken tusschen den oorspronk M en het uiterste Q der ordinaat NQ bevat zyn.

III. GRONDLES.

§. 35. *Gesteld zynde dat de raaklyn* MT *bepaald word door den verlengden as in het punt* T; (Fig. 9.) *en men door den oorspronk* A, *de raaklyn* ACL *trekt, welke de raaklyn* MT *in het punt* C *doorsnyd, en den verlengden diameeter* MK *in het punt* L *ontmoet; zal de drieboek* CAT *gelyk zyn aan de drieboek* MCL.

BETOOGINGE.

De Δ^{n} CAT en MCL zyn beiden rechthoekig, wyl ML en AF eevenwydig aan elkander zyn (§. 34.), en AC $\perp$ op AF is (*l*), de zyde AT van den een is ook = aan de zyde LM van den andere, want AT is = aan AP (§. 28.), en AP is = aan ML, om dat APML een rechthoek is; eindelyk zyn de hoeken by C aan elkander gelyk (*m*). en bygevolg is de ΔCAT = aan de ΔMLC (*n*).

D. T. B. W.

GRONDLES,

Zoo men uit het Brandpunt F *van een parabel* (Fig. 56.) *de lyn* FN *trekt tot aan het punt* N *daar de raaklyn van den as* NB *een diameeters raaklyn* AM *ontmeet; zal deeze lyn* FN *middenevenreedige zyn, tusschen het vierde deel van den parameeter,* (*zynde* BF) *en de voerstraal* FM; *dat is* FB : FN = FN : FM.

B E-

(*l*) Eucl. XXIX; 1. (*m*) Eucl. XV: 1.
(*n*) Eucl. XXVI: 1.

BETOOGINGE.

Trekt de ordinaat MP.

Dewyl de Δ^n ABN en APM ∽ zyn, heeft men AB: BN $=$ AP : PM; maar AB is $= \frac{1}{2}$AP (§. 28.) by gevolg is BN $= \frac{1}{2}$PM (k); BF is $=$ aan $\frac{1}{4}p$, en de Δ BFN is rechthoekig, dus NF $= \sqrt{\overline{BN}^2 + \overline{BF}^2}$ of NF $= \sqrt{\frac{1}{4}\overline{PM}^2 + \frac{1}{16}p^2}$; maar $\overline{PM}^2$ is $=$ BP $\times p$ (§. 23.) dus is $\sqrt{\frac{1}{4}\overline{PM}^2 + \frac{1}{16}p^2} = \sqrt{\frac{1}{4}p(BP + \frac{1}{4}p)}$, en FM $=$ BP $+$ BF $=$ BP $+ \frac{1}{4}p$; by gevolg ook $\sqrt{\frac{1}{4}p(BP + \frac{1}{4}p)} = \sqrt{\frac{1}{4}p \times FM} = \sqrt{BF \times FM}$; dus weederom NF $= \sqrt{BF \times FM}$; en by gevolg BF : NF $=$ NF : FM.

D. T. B. W.

I. GEVOLG.

§. 36. De driehoek TMP (Fig. 9.) is gelyk aan den regthoek APML; want zoo men van deezen, hun gemeen deel weg neemt, (naamentlyk den vierhoek ACMP) zyn de ooverblyfzels de twee

(k) Eucl. XIV. 5.

twee aan elkander gelyken △n CAT en CLM, gelyk zoo eeven beweezen is.

II. GEVOLG.

§. 37 Hier uit volgt verder, dat in gevalle men door eenig ſtip N aan de kromme lyn, tot den diameeter MQ, eene ordinaat QNR toog, welke verlengt zynde den as AP, of zyn verlengde, in het ſtip R aantrof, en dat men door dat zelvde ſtip N, ook een ordinaat NG tot den as AP toog, meede verlengt tot in het ſtip H; zoude de △ GRN aan den □ AGHL gelyk zyn: want om dat de lynen MP, GN; MT en QN eevenwydig aan elkander zyn, ieder aan ieder, zyn de △n MPT en NGR ook ∽; dus zyn zy tot elkander in verdubbelde reeden van hunne gelykſtandige zyden (*n*) en by gevolg △MPT: △NGR $= \overline{MP}^2 : \overline{GN}^2$. Door de eigenſchappen der parabel (§. 12.) is $\overline{PM}^2 : \overline{GN}^2 =$ AP:

(*n*) Eucl. XIX: 6.

AP : AG; maar de □ⁿ APML en AGHL ſtaan tuſſchen de gelykwydige ML en AP (§. 34.) dus zyn die tot elkander als AP tot AG (o) bygevolg is △MPT: △NGR = □ APML: □ AGHL. (p); maar △ M P T is = aan de □ APML (§. 36.) dus △ NGR = □ AGHL (q).

III. Grondles.

§. 38. Uit het voorgaande blykt vervolgens dat de △NQH gelyk is aan den □ TMQR; want de △ TPM is = aan den □ APML (§. 36.) en de △NRG = □ AGHL (§. 37), trekkende deeze laatste gelykheid van de eerſte af, heeft men △ TPM — △ NRG = □ APML — □ AGHL, en neemende van deeze den gemeenen vierhoek DGPM weg blyft 'er de vierhoek NDTR = △ DHM oover; eindelyk de vierhoek DMQN beiderzyds byvoegende, verkrygt men vierhoek

(o) Eucl. I: 6. (p) Eucl. XI: 5.
(q) Eucl. XIV: 5.

hoek NDTR + vierhoek DMQN = △ DHM + vierhoek DMQN of □ TMQR = △ NQH.

IV. GRONDLES.

§. 39. *De vierkanten* $\overline{NQ}^2$ $\overline{nq}^2$ *der ordinaaten* NQ, nq, *van eenen en zelvden diameeter* (Fig. 10.) *ſtaan tot elkander gelyk haare eigen abſciſſen* MQ, *en* Mq.

BETOOGINGE.

Laaten door de uiterſtens N en *n* der ordinaaten NQ en *nq*, en aan den diameeter MQ of zyn verlengde, getoogen zyn de ⊥ⁿ NH en *nh*, laat die ordinaaten NQ en *nq* verlengt worden tot aan den as AP in de ſtippen R en *r*. De △ⁿ NQH, *nqh* zyn ∽, (dewyl zy uit eevenwydige lynen voortkoomen), en zyn gelyk aan de □ⁿ TMQR, en TM*qr*, ieder aan ieder (§. 38.), daar by zyn de vierkanten der gelykſtandige zyden van de gelykvormige △ⁿ tot elkander als die driehoeken

zelvs

zelvs, (*r*) by gevolg $\overline{NQ}^2 : \overline{nq}^2 = \triangle NQH :$ $\triangle nqb$. maar deezen $\triangle^n$ gelyk zynde aan de $\square^n$ T M Q R en T M *q r* (*s*) koomt dus $\triangle NQH : \triangle nqb = \square$ TMQR : $\square$ TM*qr*, en om dat die $\square^n$ tusschen de eevenwydige H*q* en T*r* staan, is (*t*) TMQR : TM*qr* = MQ : M*q*. en by gevolg (*v*) $\overline{NQ}^2 : \overline{nq}^2 = MQ : Mq$.

D. T. B. W.

I. GEVOLG.

§. 40. Zoo men eene rechte lyn zoekt (die wy *π* zullen noemen.) welke derde eevenreedige zy tot eene der abscissen en haare eigene ordinaat, (beiden aan een diameeter MQ (*a*)) zal deeze lyn de parameeter zyn van dien diameeter MQ, waar op de abscisse genoomen is: en het vierkant van een zyner ordinaaten zal gelyk zyn aan het product van haar abscisse

(*r*) Eucl. XIX; 6.
(*s*) Eucl. VII: 5.
(*t*) Eucl. I: 6.
(*v*) Eucl. ~~II~~: 5. XI
~~(x) Eucl. II: 6.~~
(a) Eucl. XI: 6

se door dien zelvden parameeter, want zy gesteld dat x een absciffe is en y een ordinaat van welker π een derde eevenreedige is, dan zal $x : y = y : \pi$ zyn, en dus $y^2 = \pi x$; maar zoo eeven is 'er beweezen dat de vierkanten der ordinaaten tot elkander zyn als haare eigene absciffen; indien men dan eene andere ordinaat Y nam wier absciffe $=$ X waare, zoude men verkrygen $Y^2 : y^2 = X : x$, vermeenigvuldigende de twee laatste leeden deezer eevenreedigheid door π, is $Y^2 : y^2 = \pi X : \pi x$; nu is in deeze eevenreedigheid $y^2 = \pi x$; en dus $Y^2 = \pi X$ (*b*) bygevolg is dan de vergelyking van de parabel weegens zyn diameeters beschouwt eeven de zelvde als die, welke deeze kromme lyn in vergelyk van haaren as heeft.

II. GEVOLG.

§. 41. Hier volgt nog uit dat de parameeter π van een diameeter, gelyk is aan

(*b*) Eucl. XIV: 5.

aan de ſom van die des as, gevoegt tot viermaal de lyn AP abſciſſe der ordinaat MP, welke getoogen is uit den oorſpronk van dien diameeter tot aan den as: dat is te zeggen, dat de waardy van den parameeter van een iegelyken diameeter altoos gelyk is aan $p+4x$ of $\pi=p+4x$. Om dit te bewyzen, zy getoogen door de kruin A van de parabel eene ordinaat AZ op den diameeter MQ, hier door zal men $\overline{AZ}^2=MZ\times\pi=AP\times\pi$ (§. 40.) verkrygen; dewyl $MZ=AP$ is volgens §§ 28 en 34; maar de rechthoekige △ MPT geeft $\overline{MT}^2$ of $\overline{AZ}^2=\overline{PM}^2+\overline{PT}^2$; dus $AP\times\pi=\overline{PM}^2+\overline{PT}^2$; ſtellende voorts de ſtelkundige waardyen voor deeze lynen is $x\times\pi=px+4x^2=(p+4x)\,x$, en deelende de beide leeden door x, heeft men $\pi=p+4x$.

III. GEVOLG.

§. 42. Hier uit volgt dat de parameeter π van een iegelyken diameeter het viervoud is van den afſtand FM zyns oorſpronks

ſpronks tot het brandpunt F van de parabel, of het viervoud der. afſtand van dat zelvde ſtip M tot de leids-linie; want men heeft reeds gezien (§. 28.) dat FM = FT is = AF of $\frac{p}{4}$ + AT of x (§. 25 en 27.) dus 4 FM = $p + 4x = \pi$; door het voorgaande gevolg.

Hier uit blykt, dat de parameeter van den as de kleinſte van allen de parameeters moet zyn.

IV. Gevolg.

§. 43. Indien men op een der diameeters eene abſciſſe MQ' neeme die gelyk zy aan MF of FT = $\frac{1}{4}\pi$, zal haare ordinaat aan $\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2}$ of $\frac{1}{2}\pi$ gelyk zyn; waar uit volgt dat het dubbeld van die diameeters ordinaat die door het Brandpunt gaat, gelyk is aan den parameeter van dezelve, eeven gelyk getoond is zulks plaats te hebben voor den as (§. 26).

De parabel is de eenigſte kromme lyn in welke deeze waarheid plaats heeft voor den as en voor den diameeter te gelyk.

V. GRONDLES.

§. 44. *Zoo men door de uiterſtens* M *en* N *van twee ordinaaten* MP *en* NQ (Fig. 11.) *eene ſnylyn* MN *trekt, en dezelve verlengt tot zy den diameeter of zyn verlengde in het ſtip R ontmoet; zal altoos* $\overline{AR}^2 = AP \times AQ$ *zyn.*

BETOOGINGE.

Men ſtelle $AR = a$, $AP = x$ en $AQ = t$, dan zal $PR = a+x$ zyn, en $RQ = a+t$. daar by is (om dat de Δ^n RPM en RQN $\backsim$ zyn) $\overline{RP}^2 : \overline{RQ}^2 = \overline{PM}^2 : \overline{QN}^2 = AP : AQ$ (§. 39.). neemende de ſtelkundige waardyen is $\overline{RP}^2$ of $a^2 + 2ax + x^2 : \overline{RQ}^2$ of $a^2 + 2at + tt = \overline{AP}$ of $x : AQ$ of t; vermeenigvuldigende de uiterſtens met elkander, als meede de middelſtens, verkrygt men $aat + 2atx + txx = aax + 2atx + ttx$: beiderzyds $2atx$ wegneemende en overbrengende, komt

komt 'er, $aat - aax = ttx - txx$, of $aa(t-x) = tx(t-x)$ en dus $aa = tx$ dat is te zeggen $\overline{AR}^2 = AP \times AQ$.

D. T. B. W.

I. GEVOLG.

§. 45. Zoo men veronderſteld, dat de rechten MP en NQ eevenwydig aan zig zelfs beweegende, verſchooven worden tot zy zig met elkander vereenigen in M'P'; zal de ſnylyn NMR in een raaklyn M'T veranderen, en de lynen AP en AQ zullen ieder gelyk worden aan AP', maar de eevenreedigheid zal altoos blyven; dus zal men $\overline{AT}^2 = AP' \times AP'$; verkrygen, en bygevolg $AT = AP'$; waar uit volgt, dat de onderraaklyn P'T op eene der diameeters genoomen, altoos het dubbeld is van de absciſſe der ordinaat die uit het raakpunt getoogen is. En dus zal de algemeene *formula* der onder-raaklynen (zoo wel voor den as als voor eenig ander diameeter) altoos deeze zyn, $PT = 2x$.

II. GEVOLG.

** §. 46. Uit dit voorstel volgt, dat zoo men door het uitersten M (*Fig.* 12.) van een ordinaat en door de uiterstens N, *n*, en *n'* van verscheiden andere ordinaaten QN, *qn*, *q'n'* eenige sny-lynen NM, *n* M en *n'*M trekt, den diameeter ontmoetende in de punten R, *r*, en *p*; zullen de vierkanten der lynen AR, A*r*, en A*p* tot elkander zyn als de *producten* haarer absciſſen AQ, A*q* en A*p*, vermeenigvuldigt door de beſtendige AP; of eerder, gelyk die zelve absciſſen tot elkander zyn (deelende de leeden door de beſtendige AP die haar gemeen is). Zoo men dan die lynen AR, A*r* en A*p* (*Onder-ſny-lynen* (*ſous ſecantes*) genaamd) op de ordinaaten QN, *qn* en *q'n'* in QS, *qs*, en *q' s'* overbrengt, zal de kromme lyn die door alle deeze punten gaat, (en welke men zoude kunnen noemen, de *onder-ſny lyns-krom-*

me

me lyn,) een parabel zyn, hebbende de absciſſe AP voor parameeter.

III. GEVOLG.

§. 47. Deeze waarheid zoude nog plaats hebben wanneer de ſnylyn den diameeter binnen de parabel ontmoette, (*Fig.* 11.) het geene altoos gebeurt, wanneer de ordinaat QN aan de andere kant van den diameeter in QN genoomen is.

De betooging hier van is de zelvde als die van de Grondles.

VI. GRONDLES.

§. 48. *Indien men in een Parabel-ſtuk (ſegment parabolique)* (Fig. 13.) *een drieboek* MAm *beſchryft, ſtaande met de top* A *in den oorſpronk des diameeters, die door het midden van de grondlyn* Mm *gaat: zal deeze drieboek* MAm *de grootſte zyn van alle de drieboeken die men in dat Parabel-ſtuk kan beſchryven.*

BETOOGINGE.

Zoo 'er door het ſtip A een raaklyn AL, getoogen word, zal dezelve eevenwydig zyn aan de ordinaat MP*m* (§. 34.) dus zullen alle de andere ſtippen der kromme lyn beneeden die raaklyn vallen: waar uit blykt, dat de △MA*m* de grootſten is die 'er beſchreeven kan worden in het gegeeve parabel-ſtuk.

D. T. B. W.

I. GEVOLG.

§. 49. Hier volgt uit, dat zoo men in de overige parabel-ſtukken ANM, en A*nm* de grootſten driehoekenwil beſchryven, men de peezen AM en A*m* in twee moeten deelen in de ſtippen F en *f* en door die middens de diameeters FN en *fn* trekken, als meede in elk der parabel-ſtukken de rechte lynen AN, en NM, A*n* en *mn*, tot aan de oorſpronk en N en *n* van die getoogen diameeters.

II.

II. GEVOLG.

§. 50. De driehoek MPA is het viervoud van den driehoek ANM. Om dit te bewyzen, laaten 'er de twee rechten NQ en FG door de punten N en F eevenwydig aan de ordinaat AP getoogen zyn. Dewyl DF eevenwydig is aan AP, en dat dezelve door het midden van AM gaat, zullen de rechte lynen NQ en FG ieder de helft zyn van de ordinaat MP; ten anderen, de absciſſen AP en AQ tot elkander ſtaande gelyk de vierkanten haarer ordinaaten (§. 12.) heeft men AP : AQ $= \overline{MP}^2 : \overline{NQ}^2 = 4 : 1$, doordien MP het dubbeld is van NQ; bygevolg, zullen de twee gelyke △! ANF en MNF te ſaamen gelyk zyn aan den △ AFG, wyl deezen driehoek met de andere tuſſchen eevenwydige lynen ſtaat, en dat de baſis AG het dubbeld is van NF (*a*), buiten dat, is het zigtbaar dat de △ APM het

(*a*) Eucl. I; 6.

het viervoud is van de △ AFG; dus is ook die △ APM = 4 △ⁿ ANM, om dat de △ ANM = is △ ANF + △ MNF.

VII. GRONDLES.

§. 51. *Den inhoud van een Parabel-ſtuk* MNAnm (Fig. 13.) *is gelyk aan de twee derden eens omſchreeven Paralelograms* MLlm, *welke gemaakt is van de dubbelde ordinaat* MPm, *en van de abſciſſe* AP.

BETOOGINGE.

Zoo eeven heeft men getoont, dat de △ ANM het vierde deel is van den △ AMP; op de zelfde wys zal het ook blyken, dat de ſom van de grootſte △ⁿ MRN en NrA, ieder gelyk zyn aan het vierde deel der △ ANM. Dus kan men de oppervlakte van het Parabel-ſtuk beſchouwen, als gedeelt zynde in een ononeindig aantal ſoortgelyke driehoeken, alle afneemende in de reeden van 4 tot 1; zoo men dan de oppervlakte van den △ AMP ſteld te zyn = 1; zal den inhoud,

houd-vinding (*quadrature*) des Parabel-stuks MNA*nm* afhangen van de vergaadering der tot in 't oneindige afklimmende meetkunstige reeks, 1: $\frac{1}{4}$: $\frac{1}{16}$: $\frac{1}{64}$ enz: welke som gevonden word door de *formula* $S = \frac{aa}{a-b}$ (*) maakende $a = 1$ en $b = \frac{1}{4}$,

(*) Het is eene bekende zaak dat de som eener Progres gelyk is aan $\frac{aq^n - a}{q - 1}$ (stellende a gelyk aan de eerste term, $b =$ aan de tweede, $q =$ aan de reeden en $n =$ aan 't getal der termen. (Zie *Maclaurin Algebre* §. 209. *I. Part.*) De laatste term van een afloopend Progres, oneindig klein zynde, door dien de termen in eene oneindige meenigte zyn, zal q die een breuk is, een oneindige groote noemer hebben; en dus kan $q^n = 0$ gesteld worden; dit nu zynde, is $aq^n = 0$; en de waardy $\frac{aq^n - a}{q - 1}$ verandert in $\frac{-a}{q-1}$; maar $q =$ aan de reeden zynde, en $b =$ aan de tweede term, zoo is $aq = b$ of $q = \frac{b}{a}$; deeze waardy nu voor q gesteld wordende, is $\frac{-a}{q-1} = \frac{-a}{\frac{b}{a}-1} = \frac{-a}{\frac{b-a}{a}} = \frac{-a^2}{b-a} = \frac{a^2}{a-b}$ gelyk aan de som der progres, eeven als by den Schryver.

$=\frac{1}{4}$, is S$=\frac{1}{3}$; of het Parabel - ſtuk ANMP $=\frac{2}{3}$ van den △AMP, gelyk aan $\frac{2}{3}$ van het Paralelogram ALMP (*b*); en verdubbelende beiderzyds is het Parabel - ſtuk MNA*nm*$=\frac{2}{3}$ □MLl*m*.

D. T. B. W.

GEVOLG.

§. 52. Dus is het halve *Paraboliſch aanvulſel* ANML (*complement parabolique*) gelyk aan $\frac{1}{3}$ van het □ ALMP; dewyl het Parabel - ſtuk ANMP het $\frac{2}{3}$ van dat zelvde □ ALMP is.

AANMERKINGE.

§. 53. Uit al het tot nu toe gezegde volgt, dat de Parabels eigenſchappen altoos de zelvde blyven, het zy men deeze kromme lyn of met betrekking tot haaren as, of met betrekking tot haaren diameeter beſchouwe. Dus kan men zig een parabel welke ſlegts op een haarers diameeters betrekking heeft, verbeelde als of zy uit een andere met haarer as betrekke-

(*b*) Eucl. XXXXI: 1.

kelyken parabel voortkwam, die de zelvde parameeter had, en waar van alle de ordinaaten op deezen nu in diameeter veranderden as, gelykelyk zoude geboogen zyn.

De verdere meenigvuldige en weetenswaardige Eigenfchappen deezer kromme lyn laat het beftek van 't werk niet toe, hier by te voegen.

Het voornaamft gebruik van de Parabel, is desfelfs toepasfing op de gefmeeten Lighaamen, welke in hunnen vlugt deeze kromme lyn befchryven. Zy word gebruikt in de *Gefchutkunde* (*Artillerie*), en in de *Sterrekunde* (*Aftronomie*). Den vermaarde *Newton* is de eerften geweeft die den loop der Comeeten door middel van de parabel bereekend heeft, om dat die Lighaamen zeer lange uitgeftrekte elipfen befchryven, die niet veel van een parabel verfchillen.





DERDE HOOFTDEEL.

Van de Eigenschappen der Elips of Langrond, als op een vlak beschreeven zynde beschouwt.

BEPAALINGE VAN DEEZE KROMME LYN.

§. 54. *Gegeeven zynde een bepaalde rechte lyn* Aa (Fig. 14.) *op een Vlak, en twee punten* F *en* f *op dezelve, staande beide evenwydig van de uitersten der gegeevene* Aa, *dan is de Elips zoodaanig een kromme lyn, dat de som* FM+fM *der afstanden van een iegelyk punt* M *op dezelve genoomen, tot de punten* F *en* f, (*welke wy* Focus-sen *of* Brandpunten *zullen noemen*) *altoos gelyk zyn aan de gegeeve bepaalde rechte lyn* Aa; *welke lyn* Aa *den grooten As van de elips genaamd word.*

GEVOLG.

§. 55. Uit deeze Bepaalinge volgt, dat men gemakkelyk de *Elips* door eene ge-

staa-

ſtaadige voortgang kan beſchryven hegtende in de Brandpunten F en *f* de uiterſtens van een aan den as *Aa*, gelyken draad; en deeze draad altoos geſpannen of geſtrekt houdende door middel van een grift M, doet men deeze grift voort gaan van A tot *a*, zoo wel booven als beneeden den as *Aa*. Het is nog klaarblykelyk, dat de uiterſtens van den as *Aa*, aan de kromme lyn aanſtooten, want wanneer de beſchryvende grift M gekoomen zal zyn in de punten A of *a*, is altoos $AF + Af$, of $aF + af = Aa$. Enverder, dat deeze kromme lyn in een cirkel verandert, wanneer de afſtand der Brandpunten gelyk word aan nul; want in dat geval zyn alle de afſtanden FM gelyk aan elkander, en gelyk aan de helft van den as *Aa*.

BEPAALINGEN.

§. 56. Ten 1e worden de uiterſtens A en *a* van den as *Aa*, de *Kruynen* van die kromme lyn genoemd. Ten 2de het punt

C midden van den as A*a*, is het *middelpunt* van de elips. Ten 3de De rechte lyn BC*b*, welke ⊥ is op den grooten as in het middelpunt C en aan beide zyden B en *b* door de kromme lyn bepaald word, is de *Kleine* of *Tweeden-As*. Ten 4de is een iegelyke rechte MP of MQ, getoogen uit eenig punt M van de kromme lyn loodrecht tot een der as-ſen, een *Ordinaat* aan dien as tot welken zy getoogen is. Ten 6de word in 't algemeen aan de ordinaaten en haare eigen absciſſen de naam van *meede-ordinaaten* (*co-ordonnées*) gegeeven. En eindelyk ten 7de word de derde eevenreedige aan de tweeaſſen, de *Parameeter* genoemd van dien as, welke de eerſte term der eevenreedigheid uitmaakt.

AANMERKINGE.

§. 57. Wy zullen in 't vervolg van dit Hoofdeel den eerſten as A*a* altoos = ſtellen aan $2a$; den tweede $Bb = 2b$; den afſtand F*f* der Brandpunten $= 2c$; den para-

parameeter van den grooten as$=2p$, en die van den kleinen $=2\pi$; den eersten word bepaald door deeze eevenreedigheid, $2a: 2b=2b: 2p$, en den tweede door deeze, $2b: 2a=2a: 2\pi$; waar uit volgt dat de parameeters van den halve grooten, en van den halve kleinen as, gelyk zyn aan p en π. Wy zullen op de zelvde wyze de onbepaalde CP=stellen aan x, en PM=y. Dus zal de absciffe AP gelyk zyn aan $a+x$, en de ander aP $=a-x$, wanneer het punt P tusschen C en a valt, en in teegendeel zal AP= zyn aan $a-x$, en aP$=a+x$, wanneer het punt P aan de andere zyde tusschen C en A valt. In deeze stellinge dat den oorspronk van x in het punt C is, kan men ook dat punt C aanzien als de oorspronk der absciffen; en zoo men als *stellige* (*positives*) absciffen neemt, die CF of x, welke naar het punt a genoomen worden, zullen de andere absciffen welke tusschen deeze stippen C en A vallen, *ontkennende* (*negatives*) zyn. Men moet ook wel aanmerken dat in deeze stel-

ſtelling, de ordinaaten PM van den grooten as, gelyk zyn aan de absciſſen CQ, van den kleinen; en op de zelvde wyze dat de absciſſen CP van den grooten as gelyk zyn aan de ordinaaten QM op den kleinen; en omgekeert. Dikwyl ook zullen wy de oorſpronken der absciſſen in de kruinen A of *a* neemen; en indien men in dat geval, een der absciſſen AP=ſteld aan *x*, zal de andere *a*P=zyn aan 2*a*—*x*. In 't algemeen kan een eigelyk vaſt punt op het vlak van de kromme lyn genoomen, aangezien worden als den oorſpronk der absciſſen; maar het was natuurlyk dezelve in dit geval te bepaalen of in het middel-punt, of in een der kruinen, om dat deeze punten de aanmerkelykſte zyn, en dat zy ook meer gemak in de bereekeningen geeven.

EERSTE GRONDLES.

§. 58. *De halve kleine as* BC (Fig. 14.) *is midden-eevenreedige tuſſchen de afſtanden*

AF

AF *en* aF, *van een Brandpunt* F *tot de uiterstens* A *en* a, *van den grooten as.*

BETOOGINGE.

Dewyl CF of Cf = is aan c, en CA of $Ca = a$; zal AF = zyn aan $a-c$ en aF = $a+c$; men moet dan betoogen dat, $a-c : b = b : a+c$; of, dat b^2 = is a^2-c^2.

Door de Saamenstelling is $Bc \perp$ op het midden van Ff, en het punt B is in den omtrek der elips; by gevolg zyn de rechten BF en Bf uit de brandpunten F en f getoogen aan elkander gelyk, en ieder de helft van den grooten as Aa; dus Bf $= a$; dit gesteld zynde heeft men (om dat de $\triangle$ BCf rechthoekig is,) $\overline{BC}^2 = \overline{Bf}^2 - \overline{Cf}^2$, en stellende de analytische waardyen in plaats, is $b^2 = a^2 - c^2$; waar uit voortvloeid, $a-c : b = b : a+c$.

D. T. B. W.

II. GROND-

II. GRONDLES.

§. 59. *Het vierkant* $\overline{PM}^2$ (Fig. 14.) *van een iegelyke ordinaat* PM *aan den grooten as* Aa, *ſtaat tot den rechthoek* AP×aP *der absciſſen* AP *en* aP; *gelyk het vierkant* $\overline{CB}^2$ *der halven kleinen as* CB, *ſtaat tot het vierkant* $\overline{CA}^2$ *van den halven grooten as* CA: *of 't geen op 't zelvde uitkomt, men zal voor iedere ordinaat* PM *deeze eevenreedigheid hebben*, $y^2 : a^2 - x^2 = b^2 : a^2$.

BETOOGINGE.

Laaten van het punt M, uiterſte der ordinaat PM, getoogen zyn de lynen MF en M*f* tot in de brandpunten F en *f*; uit dat zelvde punt M beſchryft met de ſtraal MF, een cirkel-boog DFGK welke den grooten as *Aa* in twee punten ſnyden zal, naamentlyk in F en in G, en de verlengde M*f* ook, in de punten D en K. Door een eigenſchap der elips, heeft men

men $fM+MF=2a$ (§. 54.) by gevolg ook $fM+MD$ of $fD=2a$. Zoo men dan deeze lyn fD in twee deelt in L, heeft men fL of $LD=a$; waar uit volgt dat fK = is aan $2LM$; want fK is $=fD$ of wel $2LD-2MD$, en LM = aan $LD-MD$. Op de zelvde maniere kan men bewyzen dat fG = is aan $2CP$ of $2x$; want $fG=fF-FG=2CF-2FP$, en $CP=CF-FP$. Dit gesteld zynde heeft men nog deeze eevenreedigheid (om dat fD en fF beide stry-lynen zyn) $fD\ 2a$: fG of $2x=fF$ of $2c$: fK of $2LM=\frac{2cx}{a}$ (*k*), en deelende alle de termen door 2, $a: x=c: \frac{cx}{a}$; neemende de som en het verschil der *antecedenten* (of voorgaande termen in beide de *Reedens* die de eevenreedigheid uitmaaken) en der *consequenten* (of volgende termen in beide de *Reedens*) zal men deeze volgende eevenreedigheeden verkrygen (*d*).

$a: x$

(*k*) Eucl. XXXVI: 3. (*d*) Eucl. XVIII: en XVI; 5.

$\left\{\begin{array}{l} a: x = a+c: x+\frac{cx}{a} \\ a: x = a-c: x-\frac{cx}{a} \end{array}\right.$; en doende nog eene ſaamenſtelling voor de eerſte of een deelinge voor de tweede (*e*) zal men verkrygen. . . . .

$$\left.\begin{array}{l} a:a+x=a+c: a+c+x+\frac{cx}{a}=fM+fP \\ a:a-x=a-c: a-c-x+\frac{cx}{a}=fM-fP \end{array}\right\}$$

want fM is $=FL$ of $a+LM$ of $\frac{cx}{a}$ en fP is $=FC$ of $c+CP$ of x } vermeenigvuldigende dan deeze twee laatſte eevenreedigheeden met elkander is $a^2: a^2-x^2=a^2-c^2: (fM+fP)\times(fM-fP)=\overline{fM}^2-\overline{fP}^2=\overline{PM}^2$, (welke waardy men ook verkrygt door den rechthoekigen Δ fMP) ſtellende dan voor a^2-c^2 de waardy b^2 (§. 58.), en y^2 voor $\overline{PM}^2$, is $y^2: a^2-x^2=b^2: a^2$ (*f*).

D. T. B. W.

EERS-

(*e*) Eucl. XVII, en XVIII. 5.
(*f*) Eucl. XVII, en IV: 5. Corol.

I. GEVOLG.

§. 60. Hier uit volgt dat de vierkanten der ordinaaten aan den grooten as tot elkander ſtaan gelyk de *producten*, haarer eigen abſciſſen (*g*), wyl de *Reeden* van y^2 tot $a^2 - x^2$ altoos gelyk is aan de beſtendige *Reeden* van b^2 tot a^2; dat is te zeggen, dat, indien PM en Q*m* twee ordinaaten van dien as zyn, hebbende tot abſciſſen AP, *a*P; en AQ, *a*Q; is altoos $\overline{PM}^2 : \overline{Qm}^2 = AP \times aP : AQ \times aQ$.

II. GEVOLG.

§. 61. Uit deeze eevenreedigheid $y^2 : a^2 - x^2 = b^2 : a^2$ kan de vergelyking $y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$, of $(a^2 - x^2) \frac{b^2}{a^2}$ afgeleid worden, welke alle de eigenſchappen der meede ordinaaten aan den grooten as van de

(*a*) Eucl. XI: 5.

de elips op een algemeene wyze besluit; veronderstellende (gelyk hier gedaan word) dat de oorspronk van x in het middelpunt C is. Zoo in deeze vergelyking $x = o$ gesteld word, heeft men $y^2 = b^2$, of $y = \pm b$; waar uit volgt dat de ordinaat BC welke door het middel-punt C gaat, het zy booven, het zy beneeden den grooten as, altoos gelyk is aan den kleinen as. Zoo men $x =$ steld $\pm a$, is $y = o$, welke aantoont dat de elips haar grooten as aan de twee uiterstens derzelver snyd. Indien men $x =$ steld te zyn aan $\pm c$, is $y^2 = b^2 - \frac{b^2 c^2}{a^2} = \frac{a^2 b^2 - b^2 c^2}{a^2}$ of $\frac{b^4}{a^2}$; zettende voor $a^2 - c^2$ de waardy b^2 (§. 58.); dus $y = \pm \frac{b^2}{a}$. De eevenreedigheid van den halve parameeter van den grooten as, $a : b = b : p$ (§. 57.) zynde; volgt dat die halve parameeter $p =$ is $\frac{b^2}{a}$. Dus is de dubbelde ordinaat op den grooten as die door een der Brandpunten gaat, gelyk aan den Parameeter van den grooten as.

III. GEVOLG.

§. 62. Uit de eevenreedigheid die de parameeter geeft, (naamentlyk $a : b = b : p$,) haalt men $a^2 : b^2 = a : p$, (*f*) of $b^2 . a^2 = p : a$ (*g*); zoo men dan in de vergelyking $y^2 = (a^2 - x^2) \frac{b^2}{a^2}$ deeze *Reeden* van b^2 tot a^2 ſteld, verandert dezelve in $y^2 = ap - \frac{px^2}{a}$; aan welke gelykheid de naam van *Parameeters-vergelyking* gegeeven word. Zy kan dienen om door de bereekening (*calcul*) alle de punten van de elips te vinden, eeven als men door de vergelyking der aſſen doet.

III. GRONDLES.

§. 63. *Het Vierkant* $\overline{MQ}^2$ *van een iegelyke ordinaat* MQ *aan den kleinen as* Bb; *ſtaat tot den rechthoek* BQ×bQ *of* $\overline{CB}^2 - \overline{CQ}^2$ *der abſciſſen* BQ, *en* bQ; *gelyk het vier-*

(*f*) Wanneer drie grootheeden geduurig eevenreedig zyn is de eerſte tot de derde gelyk het vierkant van de eerſte tot het vierkant van de tweede Eucl. Def. [redacted] X. 5.
(*g*) Eucl. IV; 5. Corol.

vierkant $\overline{CA}^2$ *van den halven grooten as* CA *staat tot het vierkant* $\overline{CB}^2$ *van den halven kleinen as* CB: *of het geen op het zelve uit komt, men zal voor iedere ordinaat* MQ *deeze eevenreedigheid hebben* $x^2 : b^2 - y^2 = a^2 : b^2$.

BETOOGINGE.

Zoo men uit de vergelyking $y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$ de waardy van x^2 haalt, is $x^2 = (b^2 - y^2) \frac{a^2}{b^2}$, waar uit deeze eevenreedigheid voortkomt, x^2 of $\overline{MQ}^2 : b^2 - y^2$ of BQ×*b*Q of $\overline{BC}^2 - \overline{CQ}^2 = a^2$ of $\overline{CA}^2 : b^2$ of $\overline{CB}^2$, of wel $x^2 : b^2 - y^2 = a^2 : b^2$.

D. T. B. W.

I. GEVOLG.

§. 64. Dus zyn de Vierkanten der ordinaaten aan den kleinen as ook tot elkander gelyk de *producten* haarer abscissen, want de *Reeden* van het vierkant eener ordinaat tot het *product* haarer abscissen, is altoos gelyk aan de bestendige *Reeden* die 'er tusschen de vierkanten van den halven grooten en van den kleinen as is.

II.

II. GEVOLG.

§. 65. Uit de eevenreedigheid $b : a = a : \pi$ (gegeeven om de parameeter van den kleinen as te bepaalen §. 57.) komt deeze, $b^2 : a^2 = b : \pi$ of $a^2 : b^2 = \pi : b$; maar een iegelyke ordinaat QM aan den kleinen as geeft deeze eevenreedigheid, $x^2 : b^2 - y^2 = a^2 : b^2$; dus is ook (k) $x^2 : b^2 - y^2 = \pi : b$, waar uit men de vergelyking des parameeters van den kleinen as verkrygt, zynde $x^2 = \pi b - \frac{\pi y^2}{b}$, welke vergelyking meede dienen kan om die kromme lyn te beschryven.

III. GEVOLG.

§. 66. Men heeft (§. 62.) gevonden dat de parameeters vergelyking van een iegelyke ordinaat PM aan den grooten as, deeze is, $y^2 = ap - \frac{px^2}{a}$, waar uit volgt, dat het vierkant van zoo een ordi-

(k) Eucl. XI: 5.

dinaat gelyk is aan den rechthoek van den halven grooten as, door zyn parameeter p, min een diergelyke rechthoek, door de grootheid $\frac{px^2}{a}$ aangeweezen; want het is zichtbaar dat men deeze eevenreedigheid heeft $a : p = x : \frac{px}{a}$, by gevolg zyn de zyden x en $\frac{px}{a}$ van den rechthoek $\frac{px^2}{a}$ eevenreedig aan die a en p van den rechthoek ap, en dus zyn die, beide rechthoeken gelykvormig (*l*). De zelvde reedeneeringe heeft meede plaats voor de ordinaaten aan den tweeden as, wier vergelyking $x^2 = \pi b - \frac{\pi y^2}{b}$ ook op de zelve wyze te saamen gesteld is.

I. VRAAGSTUK.

§. 67. *Gegeeven zynde eene Elips* AMa (Fig. 15.) *en haar Brandpunten*, F *en* f; *door een gegeeven punt* M *aan die kromme lyn een raaklyn* MT *te trekken.*

OP-

(*l*) Eucl. Def. I: 6.

OPLOSSING EN BETOOGINGE.

Trekt uit de twee Brandpunten F en *f* de rechten FM en *f*M ſaamen koomende in het punt M; uit het zelve punt M als *Centrum* beſchryft met de ſtraal MF een Cirkel-boog, welke de verlengde *f*M ſnyden zal in een punt D; voegt de punten F en D te ſaamen door de rechte FD, ſnyd FD in twee in het punt E; en trekt laaſtelyk, door dat punt E, en het gegeeven punt M, eene rechte lyn TEM*m* welke de gevraagde raaklyn weezen zal. Om zig 'er van te oovertuigen, zal het alleen noodig zyn te bewyzen, dat, van de geheele rechte TEM*m* het eenige ſtip M, aan de kromme lyn raakt.

Door de ſaamenſtelling is ME ⊥ op het midden van FD, by gevolg gaat die lyn door alle de eevenwydige punten van F en D; zoo men dan van eenig ander ſtip *m* in die zelvde ME, drie rechte lynen *mf* *m*F en *m*D trok, zoude *m*F = *m*D

F 5

mD zyn; voegende beiderzyds de rechte mf by, heeft men $mf + m\text{F} = m\text{D} + mf = f\text{D}$, maar fmD een △ zynde is $mf + m\text{D} > f\text{D}$ (l) en die fD is = aan den grooten as Aa, dus is ook $mf + m\text{F} > \text{A}a$; waar uit klaarblykelyk volgt dat het punt m niet aan de elips zyn kan, volgens §. 54.

D. T. B. W.

I. GEVOLG.

§. 68. 't Gevolg hier van is, dat de raaklyn EM met de lynen MF en Mf aan de zelvde zyde, gelyke hoeken maakt; dat is ∨FME = ∨fMe. Want ∨fMe is = ∨DME (m); en ∨EMD = EMF. (o) om dat MD = is MF; ED = EF en ME gemeen. Zoo dan een der Brandpunten als F, een verlicht punt was, zouden de ſtraalen uit dit punt koomende en weedergekaats wordende op den omtrek van de

(l) Eucl. XX; 1. (m) Eucl. XV; 1.
(o) Eucl. VIII: 1.

de elips, allen door het andere Brandpunt *f* gaan. Deeze eigenſchap heeft ook plaats in de Cirkel, gelyk bereids in de eerſte Grondbeginzelen geleerd is.

II. GEVOLG.

§. 69. Nog volgt hier uit, dat indien men door het middelpunt C tot aan E (midden van FD) een rechte CE trekt, en uit dat zelvde punt C nog eene andere CH, eevenwydig aan de raaklyn EM; de lyn EC of MH gelyk zal zyn aan de helft van den grooten as A*a*: want de rechte lynen F*f* en FD, beide gedeelt zynde in twee (de eene in het punt C en de ander in E) zullen de beiden Δ^s. CFE en *f*FD ∽ zyn; dus heeft men CF: CE = *f*F : *f*D; (*q*) de lyn CF is de helft van F*f* dus is CE ook de helft van *f*D (*r*); maar CE is = MH (*s*), dus MH = ½*f*D, en

(*q*) Eucl. II: 6. (*r*) Eucl. XIV: 5.
(*s*) Eucl. XXXIV: 1.

en fD is $=$ Aa; by gevolg is MH ook de helft van den grooten as Aa.

III. GEVOLG.

§. 70. Het is gemakkelyk te zien, dat deeze saamenstelling ook plaats zoude hebben, in gevalle 'er gevraagd wierd om door een gegeeven punt buiten de elips, aan die kromme lyn een raaklyn te trekken. Ten dien einde trekt uit het gegeeven punt m tot in de beide Brandpunten F en f de lynen m F en mf; met een van deeze, naamentlyk met mF als straal beschryft uit het middelpunt m een Cirkel-boog naar den kant van D; beschryft vervolgens uit het Brandpunt met de straal fD $=$ aA een anderen cirkelboog snydende den eersten, in het punt D, tot welk punt D de rechte lyn FD uit het brandpunt F getoogen moet worden; trekt eindelyk door 't gegeeven punt m en door E (midden van DF) de rechte lyn mE, welke de lyn Df in het punt M snyden zal, en de elips in dat zelvde punt aan-

raa-

raaken. Deeze ſaamenſtelling brengt haare betooging zelvs meede.

BEPAALINGEN.

§. 71. Ten 1ᵉ Wanneer 'er uit het raakpunt M van de raaklyn MT een lyn MR getoogen word, 't op die zelvde raaklyn den grooten as Aa in het punt R ontmoetende, word die de *Loodrechte* of *Loodlyne* (*Normale*) van die raaklyn genoemd. Ten 2ᵉ Is het deel RP van den grooten as, tuſſchen de punten R en P begreepen, de *Onder-loodlyne* (*Sou-normale*). Ten 3ᵈᵉ Dat deel MT van de raaklyn tuſſchen het raakpunt M en het punt T begreepen, (daar de verlengde groote as aA die lyn MT ontmoet) word de bepaalde raaklyn genoemd. Eindelyk ten 4ᵈᵉ Geeft men den naam van *Onderraaklyn* aan dat deel van den verlengde grooten as, welke tuſſchen het punt P van de ordinaat PM (die door het punt M gaat) en het punt T (daar de raaklyn den verlengde grooten as ontmoet) begreepen is.

II.

II. VRAAGSTUK.

§. 72. *Word gevraagt de Analytische waardy van de onder loodlyne* PR. (Fig. 15).

OPLOSSING.

De rechte lynen MR en FD ieder ⊥ staande op de raaklyn MT, (door de saamenstelling) zyn eevenwydig aan elkander, dus zyn de △ⁿ fFD en fRM ∽, en fD of $2a$: fF of $2c = fM$ of $a + \frac{cx}{a}$ (§. 59.) : $fR = \frac{a^2c + c^2x}{a^2}$. Indien men van $fP = c + x$, het deel fR weggneemd, is $fP - fR = RP = \frac{a^2x - c^2x}{a^2} = \frac{(a^2 - c^2)x}{a^2}$, en b^2 voor $a^2 - c^2$ (§. 58.) gesteld zynde, is $RP = \frac{b^2x}{a^2} = \frac{px}{a}$, gebruik maakende van den parameeter van de grooten as (§. 57.).

D. T. D. W.

I. GE-

I. GEVOLG.

§. 73. Uit de vergelyking RP $= \frac{b^2 x}{a^2}$ haald men deeze eevenreediheid $a^2 : b^2 = x :$ RP, of $\overline{CA}^2 : \overline{CB}^2 =$ CP : RP; waar uit volgt dat de absciſſe CP altoos grooter is als de onderloodlyne RP (g), zoo lang CA grooter is als CB; en dus kan het ſtip R in dat geval nooit in 't middelpunt C vallen. In teegendeel wanneer de beiden aſſen gelyk aan elkander zyn (eeven als in de cirkel) is CP = RP, en by gevolg moeten de lynen die ⊥ op de raaklyn in M zyn, allen door het middelpunt C gaan. (gelyk betoogt is in *Eucl.* 16de *Voorſtel van het* 3e *Boek*).

II. GEVOLG.

§. 74. Wanneer $x = a$ geſteld word, zal de waardy $\frac{b^2 x}{a^2}$ in $\frac{b^2}{a} = p$ veranderen; waar

(g) Eucl. XIV: 5.

waar uit volgt, dat wanneer het ſtip P op het ſtip A valt, de onderloodlyne gelyk is aan den parameeter van den halven grooten as, en by gevolg is de kromte van de elips in dat punt eeven eens als die van een cirkel, wier ſtraal aan dien zelvde parameeter gelyk is. Wy zullen in 't vervolg aantoonen op wat wyze de kromte van den omtrek eener elips in een gegeeven punt bepaald kan worden.

II. VRAAGSTUK.

§. 75. *Word gevraagd de analytiſche waardy van de onder-raaklyn* PT. (Fig. 15.)

OPLOSSING.

De △ RMT rechthoekig zynde in M (door de ſaamenſtelling) en de rechte lyn PM eene ⊥ getoogen uit den top van den rechten hoek op de grondlyn; zoo is

RP:

RP:PM = PM:PT (*b*); en dus PT =

$$\frac{\overline{PM}^2}{RP} = \frac{(a^2-x^2)\frac{b^2}{a^2}}{\frac{b^2x}{a^2}} = \frac{a^2-x^2}{x}.$$

D. T. D. W.

I. GEVOLG.

§. 76. Uit de vergelyking PT = $\frac{a^2-x^2}{x}$, haald men deeze eevenreedigheid CP of x: AP of $a-x$ = aP of $a+x$: PT, dus is (faamenftellende) (*i*) CP of x: CP + AP of a = aP of $a+x$: aP + PT of AC + CT = a + CT; vermeenigvuldigende de uiterftens met elkander, als meede de middelftens zal $ax + x \times$ CT = $a^2 + ax$ zyn; waar uit verkreegen word (doende beiderzyds de gemeene ax weg en deelende door x) CT = $\frac{a^2}{x}$, men zoude ook die zelvde waardy voor CT verkrygen, wanneer x gevoegd wierd

(*b*) Eucl. VIII; 6. (*i*) Eucl. XVIII: 5.

wierd tot de waardy van PT; dus heeft men nog deeze eevenreedigheid CP of x: CA of a = CA of a: CT.

II. Gevolg.

§. 77. Deeze laatste eevenreedigheid word gebruikt, om een raaklyn aan de elips door middel van den as te trekken, wanneer de brandpunten niet bekend zyn. Ten dien einde zal 'er van het stip M door welk de raaklyn moet gaan, de ordinaat MP tot den as getoogen worden, wier absciffe CP is; vervolgens zal men een derde eevenreedige CT tot die absciffe en den halven as neemen (*k*); door het uiterste T van die gevonde lyn CT en door het stip M zal men eene rechte MT trekken welke de gevraagde raaklyn in het stip M weezen zal, dewyl CP: CA = CA: CT is.

(*k*) Eucl. XI: 6.

III.

III. GEVOLG.

§. 78. Zoo van CT $= \frac{a^2}{x}$, de lyn CA $= a$ afgetoogen word, heeft men AT $= \frac{a^2}{x} - a = \frac{a^2 - ax}{x} = \frac{(a-x)a}{x}$; waar uit nog deeze eevenreedigheid voortkomt CP of x: CA of a = AP of $a-x$: AT $= \frac{(a-x)a}{x}$; welke ook dienen kan om de raaklyn van een iegelyk stip M te bepaalen.

IV. GEVOLG.

§. 79. Dewyl de analytische waardyen van de lynen RP, PM en PT reeds gevonden zyn, zal het niet moeielyk weezen die der loodlynen MR, der raaklyn MT, en der lynen CR, AR of aR en RT te bepaalen. Ten 1e geeft de rechthoekige △RPM (*l*) MR $= \surd$

(*l*) Eucl. XXXXVII: 1.

$\sqrt{\overline{MP}^2 + \overline{PR}^2} = \sqrt{b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} + \frac{b^4 x^2}{a^4}}$. Ten 2e geeft de rechthoekige Δ M P T (l) $MT = \sqrt{\overline{MP}^2 + \overline{PT}^2} = \sqrt{\frac{(a^2 - x^2)\, b^2}{a^2} + \frac{(a^2 - x^2)^2}{x^2}}$, en brengende die waardyen tot eenen noemer, is $MT = \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 x^2 - a^2 x^2 + a^4)}}{ax}$ Ten 3e indien 'er van CP of x het deel RP of $\frac{b^2 x}{a^2}$ weg genoomen word zal men vinden $CR = \frac{(a^2 - b^2)x}{a^2} = \frac{c^2 x}{a^2}$ dewyl $c^2 = a^2 - b^2$ (§. 54). Ten 4e zoo men van CA of a (of wel Ca) de rechte lyn CR aftrekt of by doet, zal men voor A R of a R deeze waardy vinden $\frac{a^3 \mp a^2 x \pm b^2 x}{a^2} = \frac{a^3 \mp c^2 x}{a^2}$. Ten 5e wanneer het deel CR van CT (of $\frac{a^2}{x}$ §. 76.) afgetrokken word bekoomt men $RT = \frac{a^4 + b^2 x^2 - a^2 x^2}{a^2 x}$ of $RT = \frac{a^4 - c^2 x^2}{a^2 x}$.

V. GEVOLG.

§. 80. Indien men gebruik maakt van den parameeter in de zoo eeven gevonden waardyen is Ten 1e. MR $= \sqrt{ap - \frac{px^2}{a} + \frac{p^2x^2}{a^2}}$. Ten 2e. MT $= \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)(px^2 - ax^2 + a^3)}}{\sqrt{ax^2}}$.

Ten 3e. CR $= x - \frac{px}{a}$ of $(a - p)\frac{x}{a}$.

Ten 4e. AR of aR $= a \mp x \pm \frac{px}{a}$, of $\frac{a^2 \mp ax \pm px}{a}$. Eindelyk ten 5e. RT $= \frac{a^3 + px^2 - ax^2}{ax}$.

IV. VRAAGSTUK.

§. 81. *Gesteld zynde dat men door het stip* M (Fig. 15.) *een ordinaat* MQ *aan den kleinen as* Bb *getoogen heeft en dat de loodlyne* MR *verlengt is tot zy dien as in het stip* r *ontmoet; word 'er gevraagd de*

analytische waardy der onder-loodlyne Qr, *genoomen zynde op den kleinen as* Bb.

OPLOSSING.

De $\triangle^n$. RPM en MQr zyn ∽, (*m*) des geeven zy deeze eevenreedigheid RP of $\frac{b^2x}{a^2}$: PM of y = QM of x: Qr of $\frac{a^2y}{b^2} = \pi y$; gebruikende den parameeter π van den halven kleinen as.

D. T. D. W.

GEVOLG.

§ 82. Uit deeze waardy van $Qr = \frac{a^2y}{b^2}$, volgt 'er, dat de onder-loodlyne aan den kleinen as *Bb*, altoos gevonden kan worden door deeze eevenreedigheid b^2: $a^2 = y$: Qr, of $\overline{CB}^2 : \overline{CA}^2 = CQ : Qr$. Dewyl nu $\overline{CB}^2$ altoos kleiner is als $\overline{CA}^2$, zal de absciſſe CQ ook kleiner zyn dan de

(*m*) Eucl. XXIX: 1.

de onderloodlyne Q*r* (*n*); en by gevolg zal het ſtip *r* altoos aan die zyde van het middelpunt C vallen daar het ſtip Q niet is.

Daar by zoo men $y = b$ ſteld, of het geene op 't zelvde uit komt CQ=CB, zal Q*r*=π zyn; waar uit blykt, dat de kromte van de elips in B eeven zoo is, als die van den omtrek eener cirkel, welke door den parameeter π van den halven kleinen as als ſtraal beſchreeven is.

V. VRAAGSTUK.

§. 83. *Geſteld zynde dat* MQ *een ordinaat aan den kleinen as* Bb *is, en dat de raaklyn* MT *verlengt word tot zy den verlengden kleinen as in het ſtip* t *ontmoet; word gevraagd te bepaalen de analytiſche waardy van de onder-raaklyn* Qt *op den kleinen as genomen* (Fig. 15).

(*n*) Eucl. XIV: 5.

OPLOSSING.

De Δ^n: rQM en MQt ∽ en rechthoekig zynde, (*) zoo is $Qr : QM = QM : Qt$, en ſtellende de analytiſche waardyen $\frac{a^2 y}{b^2} : x = x : Qt = \frac{x^2 b^2}{a^2 y}$; neemende nu voor x^2, de waardy $(b^2-y^2)\frac{a^2}{b^2}$ gevonden §. 63; heeft men $Qt = \frac{b^2-y^2}{y}$.

D. T. D. W.

I. GEVOLG.

§. 84. Indien de lyn CQ of y tot Qt of $\frac{b^2-y^2}{y}$ gevoegt word, heeft men $CQ+Qt = Ct = \frac{b^2}{y}$; welke gelykheid weederom eene eevenreedigheid geeft die meede dienen kan, om een raaklyn aan de kromme lyn door middel van den kleinen as te trekken.

II.

(*) Eucl. VIII: 6.

II. GEVOLG.

§. 85. Wanneer de analytiſche waardyen der lynen rQ, QM, en Qt bekend zyn, zal het niet moeielyk weezen de analytiſche waardyen van de raaklyn Mt en van de loodlyne Mr aan den kleinen as te bepaalen, zoo wel als die der lynen Cr, Br of br en tr. Wy zullen hier de wyze niet aantoonen op welke die gevonden worden, het zy den Beginneren genoeg die waardyen zelvs hier te vinden.

Eerſtelyk, is $Mt = (\sqrt{a^2y^2+b^4-b^2y^2})(\frac{\sqrt{b^2-y^2}}{by})$.

Ten 2e., $Mr = \frac{a}{b^2}\sqrt{b^4-b^2y^2+a^2y^2}$.

Ten 3e., $Cr = \frac{a^2y-b^2y}{b^2} = \frac{c^2y}{b^2}$.

Ten 4e., Br of $br = \frac{b^3 \pm a^2y \mp b^2y}{b^2}$ of $\frac{b^3 \pm c^2y}{b^2} = b \pm \frac{c^2y}{b^2}$.

Eindelyk ten 5e., $tr = \frac{b^4+a^2y^2-b^2y^2}{b^2y} = \frac{b^2}{y} + \frac{c^2y}{b^2}$.

III. GEVOLG.

§. 86. Zoo men gebruik wil maaken van den parameeter π van den kleinen as, zullen de voorgaande waardyen zyn, (ftellende $b\,\pi$ in plaats van a^2)

Ten 1e. $Mt = \frac{(\sqrt{b\pi y^2 + b^4 - b^2 y^2})(\sqrt{b^2 - y^2})}{by}$.

Ten 2e. $Mr = \sqrt{\frac{b^3\pi - b\pi y^2 + \pi^2 y^2}{b^2}}$,

Ten 3e. $Cr = \frac{\pi y}{b} - y$.

Ten 4e. Br of $br = b \pm \frac{\pi y}{b} + y$.

Eindelyk ten 5e. $tr = \frac{b^2}{y} - y + \frac{\pi y}{b} = \frac{b^3 + \pi y^2 - b y^2}{b y}$.

AANMERKINGE.

§. 87. Alle de bereekeningen die wy tot hier toe gedaan hebben om de analy-

tifche

tische waardyen der lynen RP, PT; MR, MT; CR, CT; AR, AT of *a*R, *a*T, en haaren gelykstandigen aan den kleinen as te te bepaalen, hebben plaats in de veronderstelling dat de oorspronken der abscissen *x* in 't middel-punt C genoomen zyn. Want zoo men dien oorspronk in eenig ander stip van den as gesteld had, zouden 'er verschillende uitdrukkingen voor die lynen gevonden worden, zonder dat nochtans de eigentlyke waardyen vermindert of vermeerdert zouden zyn. Wy zullen 'er ons hier niet langer meede ophouden, te meer, om dat in het vyfde Hoofdeel de analytische waardyen van alle die lynen, te vinden zullen zyn, in de veronderstelling dat den oorspronk der abscissen in een van de kruinen der kromme lyn genoomen is. Alle de eigenschappen die wy weegens de elips tot hier toe beschouwt hebben, zyn betrekkelyk tot de asfen van die kromme lyn; in het vervolg van dit Hoofd-deel zullen wy doen zien, dat deeze zelvde eigenschappen ook plaats hebben

ben in die kromme lyn in betrekking van de *meede-Diameeters*. Men noemd *Diameeter* van de elips een iegelyke rechte lyn welke door het middelpunt gaat en weederzyds door den omtrek van de elips bepaald word. Om zoo veel moogelyk die Kundigheeden aan den Beginneren gemakkelyk te maaken, zullen wy de eevenreedigheid gebruiken die plaats heeft tusſchen deeze kromme lyn en een cirkel, welke op den grooten of op den kleinen as van de elips beſchreeven is, en om in 't vervolg alle moogelyke *Syntbetiſche* ſtrengheid in de Betoogingen te gebruiken zullen wy beginnen met het volgende *voorbewys*.

VOORBEWYS.

§. 88. *Zoo men door de uiterſtens* P *en* Q (Fig. 16.) *van een lyn* PQ, *twee rechten* PM *en* QN *eevenwydig aan elkander trekt, en uit die zelvde ſtippen* P *en* Q *nog twee anderen* PR *en* QS *meede eevenwydig aan elkander zoo dat zy eevenreedig zyn aan de*

twee

twee voorige PM *en* QN, *ieder aan ieder; zullen de rechten* MN *en* RS, (*die door de ſtippen* M, N *en* R, S *getoogen zyn*) *elkander, als meedė de verlengde lyn* PQ *in eėn en zelvde punt* A *ontmoeten.*

BETOOGINGE.

Laat ons voor een oogenblik veronderſtellen, dat, de rechte MN de lyn PQ in het ſtip A ontmoet, maar dat RS het die zelvde PQ in eenig ander ſtip als B doet, zoo is het klaar, dat 'er alleen betoogt moet worden dat de ſtippen A en B in elkander ſmelten en op een vallen; of 't geen op het zelvde uitkomt, dat AP = is aan BP. Dewyl de lynen PM en QN; PR en QS eevenwydig aan elkander zyn ieder aan ieder zoo zyn de △ⁿ. APM en AQN ∽, als meede de △ⁿ. BPR en BQS;

Door de eerſten is AP: AQ = PM: QN (*n*). . . . .
en door de ſtelling . . . , PM: QN = PR: QS,
de △ⁿ. BPQ en BQS geeven . . . PR: QS
= BP:

(*n*) Eucl. Def. I. 6.

=BP: BQ; bygevolg AP: AQ=BP: BQ (o) en deelende (p) AP: AQ–AP=BP: BQ–BP. . . . . . of AP: PQ=BP: PQ; en dus AP=BP (q) (om dat de beide *consequenten* PQ en PQ dezelvde zyn) en by gevolg valt het ſtip B op A.

D. T. B. W.

GEVOLG.

§. 89. De lyn PQ naar gevalle genoomen zynde, kan zoo klein geſteld worden als men wil; by gevolg heeft dit voorſtel nog plaats, of ſchoon deeze lyn PQ oneindig klein was. Het is niet minder klaarblykelyk dat de plaatſing deezer lynen PM, QN; PR, QS, in betrekking tot de lyn PQ niet het minſte toebrengt tot de waarheid van dit voorſtel; want dezelve hangt alleen af van de eevenwydig en eevenreedigheid dier lynen.

IV.

(o) Eucl. XI: 5. (p) Eucl. XVII: 5.
(q) Eucl. XIV: 5.

IV. GRONDLES.

§. 90. *Indien men een Cirkel beschryft op een der assen van eene gegeevene elips, en uit een zelvde stip van den gemeenen as, eene ordinaat tot de cirkel en tot de elips trekt; is iedere ordinaat aan de elips tot de ordinaat aan de cirkel, gelyk de halve as die niet aan beiden gemeen is staat tot den gemeenen halven as* (Fig. 17).

BETOOGINGE.

Zy op den grooten as A*a* een cirkel *a* NDA beschreeven, en alle de ordinaaten PM, PM van de elips verlengt tot zy de cirkel *a* NDA ontmoeten in de punten N en N; laat 'er op de zelvde wyze op den kleinen as B*b* een cirkel BE *be* beschreeven worden, en de ordinaaten QN, QN aan die cirkel meede verlengt zyn tot zy de elips ontmoeten in de stippen M en M; dan moet men eerst betoogen, dat PM: PN = CB: CA.

Ten

Ten 2e dat QM: QN = CA: CB. Hier voorens heeft men gezien (§. 59.) dat $\overline{PM}^2 : AP \times aP = \overline{CB}^2 : \overline{CA}^2$, en de cirkel *a*NDA geeft $aP \times AP = \overline{PN}^2$ (*r*); by gevolg is $\overline{PM}^2 : \overline{PN}^2 = \overline{CB}^2 : \overline{CA}^2$ (*s*), en trekkende de wortels, PM: PN = CB: CA.

D. T. B. W. ten 1e

Ten 2e heeft men (§. 63.) beweezen dat $\overline{QN}^2 : BQ \times bQ = \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2$; maar door de eigenschappen van de cirkel BNE*be* is $BQ \times bQ = \overline{QN}^2$ (*r*); dus heeft men $\overline{QM}^2 : \overline{QN}^2 = \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2$ (*s*) en trekkende de wortels .... QM: QN = CA: CB.

D. T. B. W. ten 2e

GEVOLG.

§. 91. Hier uit volgt, dat men de elips beschouwen kan als een cirkel, van wier

(*r*) Eucl. XIII, 6. (*s*) Eucl. VII, 5.

wier de gelykſtandige ordinaaten in eene beſtendige *Reeden* verkort of verlengt zyn. Wanneer de groote as van de elips meede aan de cirkel gemeen is, (dat is te zeggen zoo de cirkel op dien as beſchreeven is) kan de elips genoomen worden, als gemaakt zynde door de verkorte ordinaaten, verminderd zynde in de *Reeden* die de halve kleine as tot den halven grooten heeft. In teegendeel wanneer de kleine as aan de cirkel en aan de elips gemeen is, zyn de ordinaaten van de cirkel in de *Reeden* van den halven kleinen tot den halven grooten as verlengd.

BEPAALINGEN.

§. 92. Zy geſteld dat de cirkel TDAG (Fig. 18.) beſchreeven is op den grooten as van de elips, en dat men in die cirkel twee diameeters gG en lL naar gevalle getoogen heeft, zoodaanig dat zy elkander rechthoekig doorſnyden, en door de uiterſtens L en G van die diameeters

twee lynen LI en GK ieder loodrecht op den as CA, ontmoetende de elips in de ſtippen F en E; dan zullen de rechten CF en CE, getoogen uit het middelpunt C tot in die ſtippen F en E, overeenſtemmende *Diameeters* (*diametres correſpondans*) genoemd worden, ten aanzien van de diameeters G*g* en L*l* van de cirkel TDAG; en die zelvde rechte lynen CF en CE zullen ten aanzien van de elips twee *meede - Diameeters* (*Diamètres conjugués*) weezen.

§. 93. Op dezelve wyze zoo men door eenig ſtip N op den omtrek van een cirkel TDAG, eene ordinaat NQ aan den diameeter CG trekt, en door de uiterſtens N en Q van die ordinaat de lynen NS en QR loodrecht op den gemeenen as (waar van de eerſte QR de elips in het ſtip M en de tweede NS den diameeter CA in het punt P ontmoet) en men door die ſtippen M en P een rechte lyn MP trekt, zal deeze eene *ordinaat* aan den diameeter CE zyn. De ordinaaten PM en QN op de zelvde wyze

in

in de cirkel en in de elips bepaald, worden *oovereenſtemmende ordinaaten* (*ordonnées correſpondantes*) genoemd.

GEVOLG.

§. 94. Uit deeze Bepaalinge volgt, ten 1e dat de oovereenſtemmende ordinaaten PM en QN (Fig. 18.) den gemeenen as *a* A in een en zelvde punt O ſnyden, want QR en GK eevenwydig aan elkander zynde is QR : PR = GK : EK (*), en door een eigenſchap van de elips is GK : EK = NS : MS; dus ook QR : PR = NS : MS. (*v*) dewyl nu deeze eevenwydige lynen ook eevenreedig zyn, zullen de rechte lynen PM en QN, die door haare uiterſtens getoogen zyn, de lyn AC in een en zelvde punt O ontmoeten (*Voorb.* §. 88). Ten 2e volgt nog uit die Bepaalinge dat de elips-ordinaat PM, eevenwydig is aan den diameeter CF; want de lynen CL en QN

(*) Eucl. II, 6. (*v*) Eucl. XI, 5.

QN zoo wel eevenwydig zynde als LI en NS, (door de saamenstelling) zyn de △ⁿ CIL en OSN ∽; dus is CI: OS = IL: NS (*w*); maar door de eigenschappen van de elips heeft men IL: NS = IF: MS, dus ook CI: OS = IF: MS (*a*); waar uit volgt, dat de rechthoekige △ⁿ CIF en OSM ook ∽ zyn (*w*), en by gevolg de lynen CF en MP eevenwydig aan elkander (*c*).

V. GRONDLES.

§. 95. *Het vierkant* $\overline{PM}^2$ (Fig. 18.) *van eene ordinaat* PM *aan een diameeter* CE *in de elips, staat tot den regthoek* EP × eP *of* $\overline{CE}^2 - \overline{CP}^2$ *der absciſſen* EP *en* eP, *gelyk het vierkant* $\overline{CF}^2$ *van den halven meede-diameeter* CF *staat tot het vierkant* $\overline{CE}^2$ *van den halven diameeter* CE *op welken de absciſſen* EP *en* Pe *genoomen zyn.*

(*w*) Eucl. Def. I, 6. (*a*) Eucl. XI, 5.
(*c*) Eucl. [struck through] XXXII . 6

BE-

BETOOGINGE.

De $\triangle^n$. CFL, OMN, en OPQ gemaakt zynde door de eevenwydige lynen CL, QN; CF en PM, zyn $\sim$ aan elkander, en dus OM : OP $=$ ON : OQ $=$ CF : CL; by gevolg is (ſaamenſtellende) OM $+$ OP : ON $+$ OQ $=$ CF : CL (*b*), of wel MP : NQ $=$ CF : CL; verdubbelende dan deeze eevenreedigheid en dezelve verſchikkende (*c*) verkrygt men $\overline{MP}^2 : \overline{CF}^2 = \overline{NQ}^2 : \overline{CL}^2$: maar door de eigenſchappen van de cirkel is $\overline{NQ}^2 : \overline{CL}^2 = \overline{CG}^2 - \overline{CQ}^2 : \overline{CG}^2$, en de $\triangle^n$. CQP en CGE $\sim$ zynde geeven $\overline{CG}^2 - \overline{CQ}^2 : \overline{CG}^2 = \overline{CE}^2 - \overline{CP}^2 : \overline{CE}^2$ (*e*); dewyl nu de reeks van gelyke *Reedens* niet afgebrooken is heeft men $\overline{MP}^2 : \overline{CE}^2 - \overline{CP}^2 = \overline{CF} : \overline{CE}^2$. (*f*).

D. T. B. W.

I. GE-

(*b*) Eucl. XVIII, 5. (c) Eucl. XV en XVI, 5.
(*e*) Eucl. [illegible]II, 6. (*f*) Eucl. XVI en XXII, 5.

I. GEVOLG.

§. 96. Dus zyn de eigenſchappen van de ordinaaten aan de diameeters eeven de zelvde als die aan de aſſen; zoo men dan een der diameeters gelyk ſteld te zyn aan $2a$, zyn meede-diameeter $= 2b$, een iegelyke absciſſe op den zelven genoomen (uit het middelpunt te reekenen) $= x$, haare ordinaat $= y$, en $p =$ aan den parameeter van dien diameeter op welke de absciſſen genomen worden, verkrygt men altoos deeze eevenreedigheid $y^2 : a^2 - x^2 = b^2 : a^2 = p : a$; waar uit twee vergelykingen voortkoomen; de eerſte voor de meede-diameeters is $y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$, en de tweede voor den parameeter is $y^2 = ap - \frac{p x^2}{a}$; welke beiden op eene algemeene wyze aantoonen dat de Natuur en eigenſchappen van de elips, beſchouwt zynde, of weegens haare asſen (§. 61.) of weegens haare meedediameeters dezelvde zyn, in die onder-

ſtel-

ftellinge, dat, de oorfpronk van de absciffen geplaatft is in 't middel-punt van de elips. Zoo men dien oorfpronk aan een van de uiterftens der meede-diameeters ftelde, en een der absciffe $=x$ was, zoude de andere gelyk zyn aan $2a-x$, en de rechthoek der twee absciffen $=2ax-x^2$; het welke deeze eevenreedigheid zoude geeven $y^2 : 2ax-x^2 = b^2 : a^2 = p : a$; waar uit weederom twee nieuwe vergelykingen voortkoomen, $y^2 = (2ax-x^2)\frac{b^2}{a^2}$, en $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$; welke de natuur van de elips weederom op eene algemeene wyze aanduiden.

II. GEVOLG.

§. 97. Een elips die weegens haare meede-diameeters befchouwd is kan dus aangezien worden als of zy deeze diameeters voor asfen had, en by gevolg eeven als of deeze tot elkander neigende asfen de elips zoodaanig voortgebragt

 had.

hadden dat alle de ordinaaten een ſcheeven hoek met elkander maakten.

III. GEVOLG.

§. 98. Om dan een raaklyn MT, aan de elips te trekken, van welke de meedediameeters CE en CF bekend zyn, behoeft men alleenlyk door een ſtip M, eene ordinaat MP aan een dier diameeters te trekken, vervolgens een derde CT eevenreedig aan CP en CE te zoeken (*f*), en door het uiterſte T, van deeze en het ſtip M een lyn MT te trekken, welke de gevraagde raaklyn weezen zal. Want zoo een raaklyn kan aangezien worden als getoogen zynde door de uiterſtens van twee ordinaaten die oneindig digt by elkander zyn; dus zoo lang als de ordinaaten dezelvde zyn (welke haare neiging tot de lyn waar op de absciſſen genoomen worden ook mag weezen), zal de raaklyn die absciſſe-lyn op den zelvden afſtand van het middelpunt

(*f*) Eucl. XI: 6.

punt ontmoeten, volgens het geene gezegt is (§. 89.). Dus neemende altoos x voor de absciffe CP, zal de onder-raaklyn PT gelyk zyn aan $\frac{a^2-x^2}{x}$. Eeven zoo is het deel van den diameeter, dat begreepen is tufschen het middelpunt C en de ontmoeting T der raaklyn MT = $\frac{a^2}{x}$. In een woord alle de lynen wier bepaalinge niet afhangt van de grootheid der hoeken (dat is te zeggen, waar by de grootheid van de hoeken niet in aanmerking komt) zullen altoos de zelvde analytifche waardyen hebben, het zy de elips befchouwd word weegens de asfen of weegens de meede-diameeters. Waar uit volgt, dat de loodlyne, onder-loodlyne en de raaklyne, dezelvde waardyen niet hebben voor de diameeters die zy voor de affen hebben, om dat men in de bepaalinge van deeze lynen, veronderfteld heeft dat de hoek welke de absciffe-as met de ordinaaten maakt, een rechten hoek was.

IV. GEVOLG.

§. 99. Wanneer de diameeters CG en CL, (die meede-diameeters zyn van CE en CF) een hoek van 45°. met den gemeenen as A*a* maaken, zullen de absciſſen CK en CI aan elkander gelyk zyn, zoo wel als CE en CF. By gevolg zal dan de vergelyking van de elips (zynde $y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{x^2}$) veranderen in $y^2 = a^2 - x^2$; welke dezelvde is als die van de cirkel (§. 17.) Waar uit volgt dat het niet genoeg zal weezen, ter beſluiting dat een kromme lyn een cirkel is, wanneer het *product* van de absbiſſen gelyk is aan het vierkant der ordinaat: neen, maar booven dien moeten de ordinaaten rechte hoeken maaken met den absciſſen-as. Daar by volgt nog, dat 'er maar twee gelyke meede-diameeters in een elips weezen kunnen, dewyl 'er maar twee diameeters in de cirkel kunnen getoogen worden die met een derde, halve rechte hoeken maaken.

Het

Het is gemakkelyk te zien dat de absciſſe die deeze beiden halve meede-diameeters geeft, gelyk is aan $CA \times \sqrt{\frac{1}{2}}$.

VI. GRONDLES.

§. 100. *Indien men uit de uiterſtens* M *en* N (Fig. 19) *van twee meede-diameeters* M m *en* Nn *tot een anderen diameeter* CA *tuſſchen dezelve begreepen, twee ordinaaten* PM *en* QN *trekt; heeft men altoos deeze gelykheid*, $\overline{CA}^2 - \overline{CP}^2 = \overline{CQ}^2$; *of* $\overline{CA}^2 - \overline{CQ}^2 = \overline{CP}^2$.

BETOOGINGE.

Laat $AC = a$ zyn $BC = b$, $CP = x$ en $CQ = z$; en zy getoogen de raaklyn TM*t* bepaald wordende door de meede-diameeters CA en CB, in de punten T en *t*; dan moet 'er beweezen worden, dat $z^2 = a^2 - x^2$, of $x^2 = a^2 - z^2$.

De △ⁿ. TPM en CQN ∽ zynde (*g*), gee-

(*g*) Eucl. XXIX: 1.

geeven $\overline{PT}^2 : \overline{CQ}^2 = \overline{MP}^2 : \overline{NQ}^2$, (b) en door een eigenschap der elips heeft men $\overline{MP}^2 : \overline{NQ}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CP}^2 : \overline{CA}^2 - \overline{CQ}^2$, bygevolg $\overline{PT}^2 : \overline{CQ}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CP}^2 : \overline{CA}^2 - \overline{CQ}^2$ (c) en stellende de analytische waardyen $\frac{(a^2-x^2)^2}{x^2} : z^2 = a^2 - x^2 : a^2 - z^2$; vermeenigvuldigende de twee eerste leeden door x^2 en deelende de beiden voorgaande (*antecedenten*) door $a^2 - x^2$, verandert die eevenreedigheid in deeze $a^2 - x^2 : z^2 x^2 = 1 : a^2 - z^2$; dus $z^2 x^2 = (a^2 - z^2)(a^2 - z^2)$ of $z^2 x^2 = a^4 - a^2 x^2 - a^2 z^2 + z^2 x^2$; in welke de gelyke termen weg genoomen, de andere overgebragt zynde, en de verdere gedeelt door a^2, verandert zy in $a^2 - x^2 = z^2$ of $x^2 = a^2 - z^2$.

D. T. B. W.

I. GEVOLG.

§. 101. Wanneer 'er uit de uiterstens M en N van die zelvde meede-diameeters,

(b) Eucl. Def. I: 6. (c) Eucl. XI: 5.

ters, eenige ordinaaten MR en NS op den diameeter CB (wiens meede-diameeter CA is) getoogen worden, kan men op de zelvde wyze betoogen, dat $\overline{CS}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CR}^2$ is, en $\overline{CR}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CS}^2$. Zoo men veronderſteld dat de halve diameeters CA en CB beide aſſen van de elips zyn, zullen de $\triangle^n$ CPM en CQN rechthoekig worden, en dan ook geeven $\overline{CM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2$; want door de vergelyking $\overline{CA}^2 - \overline{CP}^2 = \overline{CQ}^2$ verkrygt men $\overline{CA}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{CQ}^2$; en uit $\overline{CB}^2 - \overline{CR}^2 = \overline{CS}^2$ heeft men $\overline{CB}^2 = \overline{CS}^2 + \overline{CR}^2$; tellende deeze beide laatſte te ſaamen is $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{CQ}^2 + \overline{CS}^2 + \overline{CR}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PM}^2 + \overline{CQ}^2 + \overline{QN}^2$, (ſtellende in plaats van $\overline{CR}^2$ en $\overline{CS}^2$ hunne waardyen $\overline{PM}^2$ en $\overline{QN}^2$) maar om dat de $\triangle^n$ CPM en CQN rechthoekig zyn, zoo is $\overline{CM}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PM}^2$, en $\overline{CN}^2 = \overline{CQ}^2 + \overline{QN}^2$ (*e*), die deeze vergelyking

(*e*) Eucl. XXXVII: 1.

king geeven $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{CN}^2$; waar uit volgt, dat de ſom der vierkanten van twee meede-diameeters in de elips gelyk is aan de ſom der vierkanten van de beiden asſen.

II. GEVOLG.

§. 102. De analytiſche waardyen van twee meede-diameeters zyn nu gemakkelyk te bekoomen; want het is zichtbaar (om dat de △ CPM rechthoekig is) dat $\overline{CM}^2 = \overline{CP}^2$ of $x^2 + \overline{PM}^2$ of $(a^2 - x^2)\frac{b^2}{a^2}$ is, en brengende alles tot denzelvden noemer $\overline{CM}^2 = \frac{a^2b^2 + a^2x^2 - b^2x^2}{a^2}$; zoo men van $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2$ of $a^2 + b^2$ de grootheid $\overline{CM}^2$ aftrekt, is de reſt $\overline{CN}^2 = \frac{a^4 + b^2x^2 - a^2x^2}{a^2}$. Dus CN $= \frac{\sqrt{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}}{a}$, en CM $= \frac{\sqrt{a^2b^2 - b^2x^2 + a^2x^2}}{a}$.

VII. GRONDLES.

§. 103. *Veronderstellende dat 'er in de elips twee meede-diameeters* CM *en* CN, *zyn* (Fig. 19.) *en nog twee andere* CA *en* CB *van welke de eene* CA *tusschen de beiden eersten valt, en dat de raaklyn* TMt *genoegzaam verlengt is om door de meede-diameeters* CA *en* CB *bepaald te kunnen worden; dan is* MT $\times$ Mt $=\overline{CN}^2$.

BETOOGINGE.

In het laatste Voorstel is gevonden dat $\overline{CQ}^2 = a^2 - x^2$ is, maar CP$\times$PT $= a^2 - x^2$, want (§. 75.) PT is $= \frac{a^2 - x^2}{x}$, en CP $= x$; dus $\overline{CQ}^2 =$ CP$\times$PT, daar by zyn de Δⁿ. CQN, PTM en MR*t* ∽; (*f*) by gevolg MT : TP = CN : CQ en M*t* : MR of CP = CN : CQ; (*g*) vermeenigvuldigende dan deeze eevenreedigheeheden

(*f*) Eucl. XXIX: 1. (*g*) Eucl. Def. I: 6.

heeden met elkander heeft men $MT \times Mt : PT \times CP = \overline{CN}^2 : \overline{CQ}^2$; en zoo eeven is gezien dat $PT \times CP = \overline{CQ}^2$ is, dus ook $MT \times Mt = \overline{CN}^2$ (*g*).

D. T. B. W.

VI. VRAAGSTUK.

** §. 104. *Gegeeven zynde twee meede-diameeters van groote en ſtand* CM *en* CN, (Fig. 19. en 20.) *'er twee anderen te bepaalen, welke met elkander eenen gegeeven hoek maaken.*

OPLOSSING.

Laaten wy voor een oogenblik ſtellen dat het Vraagſtuk opgeloſt is, en dat CA en CB (*Fig.* 20.) de gevraagde meede-diameeters zyn; zy getoogen door het punt M een raaklyn TM*t*, welkers plaats gegeeven is, (dewyl die lyn eevenwydig

(*g*) Eucl. XIV: 5.

dig moet zyn aan CN wiens ſtand veronderſteld word bepaald te zyn) daar by laat de diameeter CM verlengt zyn tot in F zoodaanig dat CM : CN = CN : MF, zoo is $\overline{CN}^2 = CM \times MF$, maar door de laatſte *Grondles* is $MT \times Mt = \overline{CN}^2$; dus ook $CM \times MF = MT \times Mt$; by gevolg moeten de vier punten C, F, T en *t*, aan den omtrek van een cirkel zyn (*b*) waar door het gegeeve Vraagſtuk in het volgende verandert.

**§. 105. *Gegeeven zynde van groote en ſtand eene rechte lyn* CF *in twee gedeeld in* M, *en nog een lyn* tMT *alleen weegens baaren ſtand gegeeven in vergelyk van de lyn* CN; *'er word gevraagt het middelpunt* G *van een cirkel te bepaalen welkers omtrek door de punten* C *en* F *gaande de lyn* Tt *zoodaanig in twee punten ſnyd, dat den boek* TCt *gelyk zy aan eene gegeeven boek* qrs.

Op-

(*b*) Eucl. XXXV, 3.

OPLOSSING.

Op het midden D van de rechte lyn CF zy de ⊥ DL opgericht, en verlengt tot die de lyn MT in het punt L ontmoet. Trekt door de punten L en F de rechte lyn LF en door het stip D de rechte DE ⊥ op MT, laat DI zoodaanig getoogen zyn, dat die met DE een ∠ EDI maake gelyk aan den gegeeven hoek; met de straal DI uit het punt D beschryft den cirkel-boog IK de rechte lyn LF in het stip K snydende, tot welke de lyn DK getoogen word, eindelyk door het stip F zy getoogen FG gelykwydig aan DK, en het punt G daar deeze lyn de verlengde DL ontmoet is het middelpunt van de begeerde cirkel. Om vervolgens de punten T en *t* te vinden daar de gevraagde meede-diameeters de raaklyn MT ontmoeten, heeft men maar uit het punt G met straal GF of G*t* een cirkel

kel te beschryven trekkende door het punt G eene rechte lyn G*t* eevenwydig aan DI (*k*).

BETOOGINGE.

Het is gemakkelyk te zien dat de lynen GF, GT, en G*t* aan elkander gelyk zyn, want door de saamenstelling is GF eevenwydig aan DK, en G*t* aan DI; dus zyn de △ⁿ LDK en LGF, als meede LDI en LG*t* ∽ aan elkander, en daarom (*l*) DK: GF = LD: LG = DI: G*t*, en by gevolg dewyl de lynen DK en DI gelyk zyn (door de saamenstelling) is de rechte GF gelyk aan G*t* (*m*). Den ▽TC*t* is = aan de gegeeven ▽*qrs*. Om dit laatste te bewaarheeden zy getoogen GH ⊥ op T*t*, welke lyn door het middelpunt gaande, snyd die de ▽TG*t* in in twee gelyk en is ook eevenwydig aan de lyn DE (die meede verondersteld word

(*k*) Eucl. XXXI; 1. (*l*) Eucl. II: 6.
(*m*) Eucl. XIV: 5.

word ,I. op T*t* te zyn) daar by zyn de lynen DI en G*t* eevenwydig, dus zynde ∀*t*GH en IDE gelyk aan elkander en aan de gegeeven hoek *qrs*, om dat de ∀IDE gelyk gemaakt is aan de ∀*qrs*; by gevolg is ∀TC*t* meede gelyk aan ∀*qrs*, dewyl die in den omtrek van een cirkel is hebbende de helft van de boog TF*t* voor maat, welke halve boog ook teffens de maat is van de middelpunts hoek *t*GH (*a*).

D. T. D. en T. B. W.

AANMERKINGE.

** §. 106. Indien men de lengte der halve meede-diameeters CA en CB (*Fig.* 19.) op de lynen C*t* en CT wilde bepaalen; zoude men door het raakpunt M een ordinaat MP op CT moeten trekken, of het geene op 't zelvde uitkomt een lyn MP eevenwydig aan CB (*b*) en vervolgens

(*a*) Eucl. XX: 3. (*b*) Eucl. XXXI: 1.

gens een midden eevenreedige CA tusſchen CP en CT neemen (*c*) die een der gevraagde diameeters weezen zal. Op de zelvde wyze vind men ook (door middel van de lynen CR en C*t*) de lengte van CB. Wanneer men de aſſen zelvs van de elips zoekt dan verandert het middelpunt G (*Fig.* 20.) in het punt L, (dat is te zeggen dat die twee punten dan op elkander vallen) en dewyl de V E D I altoos gelyk moet zyn aan die welke de meede-diameeters met elkander maaken is die V in dit geval recht; by gevolg word de lyn DI eevenwydig aan E*t* en de ſtraal DI word oneindig; waar door DK ook eevenwydig word aan LK; en dewyl 'er betoogd is dat het middelpunt G bepaald word, met door het ſtip F eene eevenwydige aan DK te trekken, is het klaarblykelyk dat men in dit geval door dat ſtip F eene eevenwydige aan KL trekken moet, welke hier de lyn FL zelvs is, en dus is

L

(*c*) Eucl. XII. 6.

L het gevraagde middelpunt, het geene buiten dat zigtbaar is uit de figuur.

De saamenstelling van dit laatste geval is eeven de zelvde, als die welke gevonden word in de Keegelsneeden van *Apollonius van Pergea*, een der Oudste Wiskunstenaaren welke oover deeze kromme lynen geschreeven hebben.

VII. VRAAGSTUK.

§. 107. *De analytische waardy te bepaalen van* CK (Fig. 19) *welke getoogen is uit het middelpunt* C *loodrecht op de raaklyn* MT; *in de onderstelling dat* MT *eevenwydig is aan den diameeter* CN *van welke de lyn* CM (*die door het raakpunt* M *gaat*) *een meede-diameeter is.*

OPLOSSING.

De $\triangle^s$ MPT en CKT zyn $\backsim$ (de $\triangle$ MPT rechthoekig zynde) dus is MT: MP = CT: CK, maar door §. 79. is

$$MT = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}} \times \sqrt{\frac{b^2 x^2 - a^2 x^2 + a^4}{x^2}},$$

CT

$CT = \frac{a^2}{x}$ (§. 78.), en $MP = b\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}$, (§. 61.); ſtellende de analytiſche waardyen heeft men $\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}} \times \sqrt{\frac{b^2x^2 - a^2x^2 + a^4}{x^2}}$: $b\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}} = \frac{a^2}{x}$: $CK = \frac{a^2\,b}{\sqrt{b^2x^2 - a^2x^2 + a^4}}$.

D. T. D. W.

VIII. GRONDLES.

§. 108. *Alle de paralelogrammen om een en zelvde elips beſchreeven en gemaakt zynde door twee meede-diameeters, zyn gelyk aan elkander en aan den rechthoek der beide aſſen.* (Fig. 19.)

BETOOGINGE.

Het is zichtbaar dat den inhoud van het *paralelogram* dat gemaakt is van de lynen CM en CN gelyk is aan den rechthoek van CN door CK (*d*); maar hier voorens is gevonden (§. 102.) $CN = \sqrt{}$

(*d*) Eucl. XXXV: 1.

$\frac{\sqrt{b^2x^2 - a^2x^2 + a^4}}{a}$ en CK $= \frac{a^2 b}{\sqrt{b^2x^2 - a^2x^2 + a^4}}$ vermeenigvuldigende deeze waardyen met elkander is CN $\times$ CK $= ab$.

D. T. B. W.

IX. GRONDLES.

§. 109. *Den inhoud eener elips ſtaat tot die van een cirkel op den grooten of op den kleinen as beſchreeven, gelyk den kleinen as tot tot den grooten ſtaat, of gelyk den grooten as tot den kleinen.* (Fig. 17.)

BETOOGINGE.

Zy veronderſteld dat de oppervlaktens van de elips *a* MBA en van de cirkel *a* N DA beiden uit een oneindige meenigte ordinaaten beſtaan die alle eevenwydig aan elkander zyn; het getal dier ordinaaten zal in beide dezelve zyn wyl zy alle op den zelvden as ſtaan; daar by is iedere PM in de elips tot de ooyereenſtemmende PN

in

in de cirkel, gelyk CB tot CA (§. 90.); dus is het getal in de eene (of de oppervlakte van de elips) tot het getal in de anderen (of de oppervlakte van de cirkel) gelyk CB tot CA.

D. T. B. W. ten 1e.

Op de zelvde wyze betoogd men dat de oppervlakte of inhoud van de elips tot den inhoud van de cirkel is, op den kleinen as beſchreeven, gelyk den grooten as CA tot den kleinen CB.

D. T. B. W. ten 2e.

I. GEVOLG.

§. 110. Hier uit volgt dat den inhoud der elips gelyk is aan die van een cirkel wier ſtraal midden eevenreedige is tusſchen de beide halven aſſen. Zy geſteld dat S = is aan den inhoud van de cirkel die op CA beſchreeven is, *s* gelyk aan die van de elips, en CL de ſtraal welke

midden eevenreedige is tusschen CA en CB. Zoo eeven heeft men gezien dat S: s = CA: CB is, en CL middel-eevenreedige zynde tusschen CA en CB, heeft men deeze eevenreedigheid CA: CB = $\overline{CA}^2$: $\overline{CL}^2$ (*a*), neemende de cirkels welke op die lynen CA en CL gemaakt zyn, (noemende dezelve cirkel CA en cirkel CL) heeft men $\overline{CA}^2$: $\overline{CL}^2$ = cirkel CA: cirkel CL (*b*); dus heeft men ook S: s = cirkel CA: cirkel CL (*c*), maar S is = cirkel CA door de onderstelling, dus is s ook = cirkel CL (*d*).

II. GEVOLG.

§. 111. By gevolg is den inhoud van een elips bynaa gelyk aan $\frac{22}{7}$ van den rechthoek der halven assen, of van den inhoud eener *paralelogram* dat gemaakt is op twee meede-diameeters, dewyl het be-

(*a*) Eucl. Def. X: 5. (*b*) Eucl. II: 12.
(*c*) Eucl. XI: 5. (*d*) Eucl. XIV: 5.

beweezen is dat den inhoud van een cirkel byna gelyk is aan het $\frac{22}{7}$ van het vierkant op de ſtraal (*). Dus is dan $S = \frac{22}{7}\overline{CA}^2$; maar $S : s = CA : CB$ zynde heeft men $\frac{22}{7}\overline{CA}^2 : s = CA : CB$ (*e*) waar uit voortkomt $s = \frac{22}{7} CA \times CB$. Zoo men eene grootere naauwkeurigheid wilde gebruiken om den waaren inhoud der elips te vinden zoude men de *reeden* van 355 tot 113 kunnen gebruiken, in welk geval men

$s =$

* In het *Compendium univerſale van den Heer Profeſſor Wolf*, § 130. is beweezen, dat den inhoud van de cirkel tot het vierkant van de middelyn omtrent is als 705 : 1000, by gevolg is den inhoud van de cirkel tot het vierkant van de ſtraal als 785 : 250 (om dat de ſtraal de helft is van de middellyn). Zoo men dan het vierkant van de ſtraal $= 1$ ſteld zal men verkrygen $250 : 785 = 1 : \frac{785}{250} = \frac{157}{50}$ omtrent gelyk aan $\frac{22}{7}$ eeven als den Schryver.

(*e*) Eucl. XI: 5.

$s = \frac{355}{113}$ CA$\times$CB verkrygt; of ſtellende n voor den omtrek en m voor den diameeter heeft men $s = \frac{n}{m}$ CA$\times$CB.

I. De Grooten *Euler* heeft in zyn *Introductio in Analyſin Infinitorum Liber I Caput VIII.* deeze *reeden* van den diameeter tot den omtrek der cirkel bepaald te zyn als de eenheid tot . . . 3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974 944 592 307 816 406 286 208 998 628 034 825 342 117 067 982 148 086 513 272 306 647 093 844 6 + &c.

AANMERKINGE.

II. De kromme lynen die de Planeeten in haaren loop rondom de Zon beſchryven, zyn Elipſen; zoo dat deeze kromme lyn de nuttigſte van allen is in de *Aſtronomie* of *Sterrekunde.* Zy is ook van gebruik in de *Geographie* of *Aardryks-beſchryving.* Om dat onzen Aardbol knolrond is, zynde plat aan de *Polen* en rond aan den *Equator* of *Eevenaar.*

IV.



VIERDE HOOFTDEEL.

Van de eigenschappen der Hyperbel of Wassende sneede als op een vlak beschreeven zynde beschouwt.

BEPAALINGEN.

§. 112. ZY *gegeeven eene rechte lyn* Aa (Fig. 21.) *welke in twee gelyk gedeeld is in het punt* C, *en aan weederzyden van dat punt* C *op de verlengde* Aa, *twee gelyk afstaande punten* F *en* f; *zoo men een oneindig aantal stippen* M *zoekt, zoodaanig geplaatst dat het verschil van de lynen* f M *en* F M (*die getoogen zyn uit de punten* F *en* f *tot een iegelyk stip* M) *altoos gelyk is aan de lyn* Aa: *zal de kromme lyn door deeze stippen getoogen, een* Hyperbel *of* Wassende sneede *genaamd worden.*

GEVOLG.

§. 113. Uit deeze Bepaalinge volgt, dat de hyperbel twee takken MA*m* en M*am* heeft; want het is zichtbaar dat men ook aan de zyde van *f* en *a* een reeks stippen M en *m* vinden kan, welke alle de zelvde eigenschappen hebben als die geen die naar A en F genoomen zyn. Deeze twee kromme lynen die met de bolle kant naar elkander toegekeert staan, worden *teegen overstaande Hyperbels* (*Hyperboles opposés*) genaamd.

BEPAALINGEN.

§. 114. Eerstelyk, zal de lyn A*a* wier groote en stand gegeeven is, den *Eerste bepaalden* of *Grooten as* van de teegenoverstaande hyperbels genaamd worden. Ten 2e de uiterstens A en *a* van die lyn de *Oorspronken* of *Kruinen* van de kromme lynen. Ten 3e de punten F en *f* (op gelyken afstand van de uiterstens op den groo-

grooten as genoomen) zyn de *Focussen* of *Brandpunten* van de teegen-overstaande hyperbels. Ten 4e. is C midden van A *a*, het middelpunt der beide kromme lynen. Ten 5e. zal de rechte lyn *b*CB, welke door het punt C loodrecht op A*a* getoogen is, den *Onbepaalden as* van de hyperbels zyn; en zoo men op die lyn aan beide de zyden van C, de deelen CB en C*b* zoodaanig neemt, dat deeze CB en C*b* ieder in 't byzonder midden evenreedige zyn tusschen den afstand van een der kruinen A of *a* tot de beide brandpunten F en *f*, zal deeze lyn *b*B de *Tweede bepaalden as* of alleenlyk *de Tweeden as* zyn der beide hyperbels MA*m* en *ma*M. Ten 6e. zoo men uit eenig stip M van de kromme lyn eene loodrechte MP op den verlengden eersten as A*a* laat vallen, zal deeze MP een *Ordinaat* van dien as genaamd worden. Ten 7e. zullen de deelen AP en *a*P, die begreepen zyn tusschen het stip P en de beide uitersten A en *a*, de *Abscissen* of *Afgesneedene* worden genaamd. Ten 8ste.

eene

eene ordinaat en haar absciſſen AP en *a*P worden (te ſaamen genoomen) met de algemeene naam van *Meede-ordinaaten* aangeweezen. Ten 9e. zal men *Ordinaat aan de tweeden as* noemen, een iegelyke MQ getoogen uit eenig ſtip van een der hyperbels loodrecht op den tweeden as. Ten 10e. zullen de deelen BQ en *b*Q van den tweeden as, die begreepen zyn tuſſchen de uiterſtens B en *b* derzelver en het punt van ontmoeting Q, de *overeenſtemmende* absciſſen van de ordinaat MQ zyn. Ten 11e. zullen wy ook de naam van *absciſſe* geeven, aan elk deel van iedere as, dat begreepen is tuſſchen het middelpunt C en het punt daar dien as zyn ordinaat ontmoet; waar uit volgt, dat in dit geval iedere ordinaat maar eene absciſſe heeft, en dat de ordinaaten van den eenen as gelyk zyn aan de absciſſen van den ander; en omgekeert. Eindelyk ten 12e. zal de lyn die derde eevenreedige aan de beide aſſen is, de naam van *Parameeter* voeren van dien as welke de eerſte plaats in de eevenreedigheid bekleed.

I. BE-

I. VRAAGSTUK.

§. 115. *De voorgaande Bepaalingen gesteld zynde, word 'er gevraagd de beide hyperbels te beschryven; of het geene op het zelvde uitkomt, zoo veel punten van die kromme lynen te bepaalen als men begeert.* (Fig. 21.)

OPLOSSING.

Beschryft uit een der brandpunten *f* als middelpunt, en met een straal *f*G grooter als *f*A, eene onbepaalde cirkelboog *m*GM; neemt vervolgens op den as A*a* naar den kant van C, een deel Aϕ = AF; beschryft uit het punt F met een straal gelyk aan ϕG nog een cirkelboog, die den eersten MG*m* ontmoeten zal in twee stippen *m* en M, welke twee punten *m* en M aan de gevraagde hyperbel zullen zyn. Want door dien Aϕ = AF is, zal *f*ϕ = A*a* zyn en *f*G — ϕG = A*a*; by gevolg is *f*M —

FM ook gelyk aan den eerſten as A*a*, dewyl de lynen *f*M en FM door de ſaamenſtellinge gelyk zyn aan de lynen *f*G en φG.

D. T. D. W.

GEVOLG.

§. 116. Dewyl de ſtraal *f*G genoomen kan worden naar gevalle, volgt hier uit, dat iedere hyperbel twee oneindige takken heeft, welke zich geſtaadig van den as A*a* verwyderen. Daar by is het zichtbaar, dat het ſtip G niet tuſſchen het punt A en het middelpunt C vallen kan; want zoo doende zouden de cirkels die uit de punten *f* en F beſchreeven worden met de ſtraalen *f*G en φG, elkander nooit ſnyden jaa zelvs niet aanraaken. De punten A en *a* zyn de *kruinen* van de te beſchryvene kromme lynen.

BERICHT.

§. 117. Wy zullen in 't vervolg van dit Hoofddeel den eersten as = stellen aan $2a$, en CF of $Cf = c$; waar door $Af = c + a$ is, en $AF = c - a$; laat ook $CB = b$ zyn. Deeze CB een midden eevenreedige tusschen Af en AF zynde (§. 114. 5 *Bep.*), zoo is $b^2 = (a+c)(c-a) = c^2 - a^2$. Wy zullen ook $CP = x$ stellen en het middelpunt C als den oorspronk der absciffen aanzien, waar door $aP = x + a$ en $AP = x - a$ is, en zy iedere ordinaat $MP =$ aan y. Het is zichtbaar (uit het geene in de 11e *Bep.* §. 114. gezegt is) dat de ordinaaten y de absciffen van den tweeden as aanwyzen, en de absciffen x de ordinaaten van dien zelven as; dewyl $MP = CQ$ en $CP = MQ$ is (*a*). Laat 'er ook gesteld zyn dat de halve Parameeter van den eersten as gelyk is aan p en die van den tweeden gelyk aan π.

I. GROND-

(*a*) Eucl. XXXIV: 1.

I. GRONDLES.

§. 118. *Het vierkant* $\overline{PM}^2$ (Fig. 21.) *van eene ordinaat* PM *aan den grooten as* Aa, *ſtaat tot den rechthoek* AP×aP *of* $\overline{CP}^2 - \overline{CA}^2$ *haarer abſciſſen; gelyk het vierkant* $\overline{CB}^2$ *van den halven tweeden as* CB, *ſtaat tot het vierkant* $\overline{CA}^2$ *van den halven eerſten as* CA. *Dat is te zeggen*, $y^2 : x^2 - a^2 = b^2 : a^2$.

BETOOGINGE.

Laat 'er uit een ſtip M tot de brandpunten *f* en F getoogen worden de rechten M*f* en MF, en zy uit dat zelve ſtip M met de ſtraal MF een cirkel DFGK beſchreeven, die de lyn *f*M genoegzaam verlengd in twee punten D en K ſnyden zal en den verlengden as A*a* in twee punten F en G (zoo lang MP niet door het brandpunt F gaat). Laat meede de lyn *f*D in twee gedeeld zyn in het

het ſtip L, dan is fL of LD gelyk aan CA; nu is (eeven als in §. 59 voor de ellips) LM = aan $\frac{1}{2}fK$ en CP = $\frac{1}{2}fG$. Dit geſteld zynde, heeft men (om de uitwendige ſnylynen van de cirkel) deeze eevenreedigheid (*i*) fD of $2a : fG$ of $2x = fF$ of $2c : fK$ of $2\,LM = \frac{2cx}{a}$; deelende iedere term door 2 heeft men $a : x = c : \frac{cx}{a}$; neemende dan eerſt de ſom en daar na het verſchil der *antecedenten* en *conſequenten* verkrygt men deeze beide eevenreedigheeden. . . . .

$$\left\{\begin{array}{l} a : x = c + a : x + \frac{cx}{a} \\ a : x = c - a : \frac{cx}{a} - a \end{array}\right\} (o)$$

neemende nog eens de ſom van de eerſte, en het verſchil van de tweede, is. . . . .

$$\left\{\begin{array}{l} a ; a + x = c + a : a + c + x + \frac{cx}{a} = fM + fP \\ a : x - a = c - a : a - c - x + \frac{cx}{a} = fM - fP \end{array}\right\}$$

en vermeenigvuldigende de gelykſtandige termen van deeze twee eevenreedigheeden-

(*i*) Eucl. XXXVI; 3. (*o*) Eucl. XVII en XVIII: 5.

heeden met elkander, heeft men $a^2 : x^2 - a^2 = c^2 - a^2 : \overline{fM}^2 - \overline{fP}^2$; maar $\overline{MP}^2$ of $y^2 = \overline{fM}^2 - \overline{fP}^2$ (*k*) en $b^2 = c^2 - a^2$ (§. 117.); ſtellende dan deeze waardyen in de laatſte eevenreedigheid verkrygt men $a^2 : x^2 - a^2 = b^2 : y^2$ (*l*), en verwisſelende $a^2 : b^2 = x^2 - a^2 : y^2$ (*m*); dus $y^2 : x^2 - a^2 = b^2 : a^2$ (*n*) en ſtellende voor de waardyen de lynen zelfs, $\overline{PM}^2 : AP \times aP = \overline{CB}^2 : \overline{CA}^2$.

D. T. B. W.

I. GEVOLG.

§. 119. By gevolg zyn de vierkanten der ordinaaten aan den eerſten as tot elkander gelyk de *produðten* haarer absciſſen tot elkander zyn; dewyl die vierkanten tot de rechthoeken haarer absciſſen in de beſtendige *reeden* van $\overline{CB}^2$ tot $\overline{CA}^2$ zyn.

II.

(*k*) Eucl. XLVII: 1. (*l*) Eucl. VII: 5.
(*m*) Eucl. XVI: 5. (*n*) Eucl. IV: 5. Corol.

II. GEVOLG.

§. 120. Uit de eevenreedigheid $y^2 : x^2 - a^2 = b^2 : a^2$ haald men deeze vergelyking $y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2$; welke de hoedaanigheeden deezer kromme lynen aanduid, befchouwd zynde weegens haar asfen, in de onderftelling dat den oorfpronk der absciffen x in het middelpunt C is. Wanneer in dezelve $x =$ aan $\pm a$ gefteld word, is $y^2 = 0$. Waar uit volgt, dat die kromme lyn den as Aa fnyd aan de uiterftens A en a, gelyk men reeds aangemerkt had (§. 116). Zoo men $x < \pm a$ fteld, zullen de waardyen van y inbeeldig zyn en dus kunnen 'er geen deelen van de kromme lyn tuffchen het middelpunt C en de uiterftens der as Aa vallen. Wanneer $x = \pm \infty$ gefteld word is $\pm y = \infty$; waar uit blykt dat alle de takken van de hyperbel geftaadig van haaren gemeenen as verwyderen. Indien $x = \pm c$ word, is y^2

$= \frac{b^2 c^2}{a^2} - b^2 = (c^2 - a^2) \frac{b^2}{a^2}$;

dus $y^2 = \frac{b^4}{a^2}$, dewyl b^2 = is aan $c^2 - a^2$ (§. 117.); by gevolg $y = \frac{b^2}{a}$, dat is te zeggen dat de ordinaat die in dit geval door het brandpunt F of f gaat, een derde evenreedige aan den halven eersten en halven tweeden as is; waar uit volgt dat die ordinaat gelyk is aan den halven parameeter.

II. GRONDLES.

§. 121. *Het vierkant* $\overline{MQ}^2$ *van een ordinaat* MQ *aan den tweeden as* Bb, *staat tot de som* $\overline{CB}^2 + \overline{CQ}^2$ *der vierkanten van den halven as* CB *en van de abscisse* CQ: *gelyk het vierkant van den halven eersten as* CA, *staat tot het vierkant van den halven tweeden* CB. *Dat is te zeggen, iedere ordinaat* MQ *aan den tweeden as* CB *geeft deeze evenreedigheid* $\overline{MQ}^2 : \overline{CB}^2 + \overline{CQ}^2 = \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2$. (Fig. 21.)

BE-

BETOOGINGE.

Uit de vergelyking $y^2 = (x^2 - a^2) \frac{b^2}{a^2}$ haald men $(y^2 + b^2)\, a^2 = b^2\, x^2$; waar uit deeze eevenreedigheid voortvloeit $x^2 : y^2 + b^2 = a^2 : b^2$ of $\overline{MQ}^2 : \overline{CQ}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2$; want CQMP een rechthoek zynde is PM = CQ en MQ = CP.

D. T. B. W.

I. GEVOLG.

§. 122. Dus zyn de ordinaaten aan den tweeden as tot elkander gelyk de som van het vierkant van dien halven tweeden as gevoegt tot dat van haare eigene absciſſen uit het middelpunt gereekend, dewyl de *reeden* van $\overline{CA}^2$ tot $\overline{CB}^2$ (die de betrekking van het vierkant dier ordinaat tot die ſom aanwyſt) eene beſtendige *reeden* is.

II. GEVOLG.

§. 123. Wanneer x gelyk gesteld word aan de buitenste ordinaat MQ en y = aan de abscisse CQ, zal $x^2 = \frac{(y^2+b)a^2}{b^2}$ de vergelyking van de hyperbel weezen, weegens haaren tweeden as Bb beschouwt; welke vergelyking (zoo wel als die aan den eersten as) dienen kan om die kromme lyn te beschryven.

III. GEVOLG.

§. 124. Wanneer de beiden halve assen CA en CB gelyk aan elkander zyn, verandert de laatste vergelyking in $x^2 = y^2 + b^2$; en de hyperbel die tot deeze vergelyking behoord, word *Gelykzydig* (*Equilatere*) genaamd. Waar uit volgt, dat men deeze hyperbel gemakkelyk door middel van eenen rechthoekigen driehoek kan beschryven, neemende altoos op MQ (welke ⊥ op de tweeden as

staat)

ſtaat) een bepaald deel MQ, gelyk aan de *Hypothenuza* AQ van den rechthoekigen △ ACQ.

II. VRAAGSTUK.

§. 125. *Word gevraagd te bepaalen de parameeters vergelykingen voor een hyperbel, welke weegens haaren eerſten en tweeden as beſchouwt word; (neemende den oorſpronk der abſciſſen in het middelpunt* C).

OPLOSSING.

Dewyl de parameeter p van den eerſten as deeze eevenreedigheid geeft $a : b = b : p$ (§. 114); heeft men ook $a^2 : b^2 = a : p$, en $p : a = b^2 : a^2$ (i); maar iedere ordinaat PM aan den eerſten as geeft $y^2 : x^2 - a^2 = b^2 : a^2$ (§. 118.) en dus (l) $y^2 : x^2 - a^2 = p : a$; waar door $y^2 = \frac{px^2}{a} - ap$ is.

D. T. D. W. ten 1º.

Op

(i) Eucl. IV: 5. Corol. (l) Eucl. XI, 5.

Op de zelvde wyze heeft men voor de parameeter π van den tweeden as, $b : a = a : \pi$; dus $b^2 : a^2 = b : \pi$, en $a^2 : b^2 = \pi : b$ (k), maar iedere ordinaat QM aan den tweeden as geeft $x^2 : y^2 + b^2 = a^2 : b^2$ (§. 121); dus heeft men weeder $x^2 : y^2 + b^2 = \pi : b$ (l), waar uit deeze vergelyking $x^2 = \frac{\pi y^2}{b} + b\pi$ gebooren word.

D. T. D. W. ten 2e.

GEVOLG.

§. 126. Uit de eevenreedigheid $a : b = b : p$, haald men $ap = b^2$; dus $a^2 + ap = a^2 + b^2$. Op de zelvde wyze uit deeze $b : a = a : \pi$, komt 'er $b\pi = a^2$; by gevolg $b\pi - b^2 = a^2 - b^2$. Dit gesteld zynde, zoo men aan de beide zyden van het middelpunt C op den grooten as, eenige abscissen neemt, ieder gelyk aan $\sqrt{a^2 + ap}$, of $\sqrt{a^2 + b^2}$, zal $y = p$ zyn (stel-

(k) Eucl. IV: 5. Corol. (l) Eucl. XI: 5.

(stellende a^2+ap voor x^2 in de vergelyking $y^2 = \frac{px^2}{a} - ap$). Op dezelvde wyze zoo men op den tweeden as CB eene absciſſe neemt $= \sqrt{b\pi - b^2}$ of $\sqrt{a^2 - b^2}$, zal $x = \pi$ zyn (stellende voor y^2 de waardy $b\pi - b^2$ in de vergelyking $\frac{\pi y^2}{b} + b\pi$). Waar uit volgt, dat om de parameeters p en π derhalven aſſen te vinden, heeft men maar op den eerſten as eene absciſſe te neemen gelyk aan A B en op den tweeden eene absciſſe gelyk aan een der zyden van eenen rechthoekigen driehoek waar van de *hypothenuza* CA en de andere zyde $=$ CB is, en de ordinaaten die tot deeze absciſſe behooren, zullen gelyk zyn aan p en π. Daar kan geen ordinaat aan den tweeden as zyn gelyk aan π, wanneer b grooter is als a; om dat dan $\sqrt{b\pi - b^2}$ inbeeldig word.

III. VRAAGSTUK.

§. 127. *Gegeeven zynde een hyperbel* MAm (Fig. 21.) *de beide brandpunten* F *en*

en f *en een ſtip* M *aan den omtrek; word gevraagd een raaklyn* MT *aan die kromme lyn te trekken, gaande door het gegeeven ſtip* M.

OPLOSSING.

Laat van het gegeeven ſtip M tot in de beide brandpunten *f* en F, getoogen worden de rechte lynen FM en *f*M; beſchryft uit dat zelvde ſtip M met de ſtraal FM een cirkel-boog ſnydende *f*M in het punt D, tot welk de rechte lyn FD getoogen is; laat die lyn FD in twee gedeeld zyn in het ſtip E en eindelyk trekt door E en M eene rechte lyn MET die de gevraagde raaklyn weezen zal.

BETOOGINGE.

Door de bepaalinge der hyperbel is *f*M—FM of *f*D = A*a* (§. 112); nu is het zichtbaar dat deeze eigenſchap alleen tot het ſtip M behoord, dewyl alle andere ſtippen in die lyn MT genoomen, deeze eigenſchap niet hebben; gelyk op de

de volgende wyze draa blyken zal. Laat van eenig ander punt *m* getoogen worden drie rechte lynen fm, mD, en mF tot in de punten f, D en F; dewyl nu mDf een △ is, zyn de zyden $mD + fD >$ mf (*a*); maar mD is $= mF$, dewyl door de ſaamenſtelling MT ⊥ op het midden van FD is; dus $mf < mF + fD$; by gevolg $mf - mF < fD$ en $fD = Aa$; dus ook $mf - mF < Aa$; by gevolg is het ſtip *m* niet aan den omtrek van de hyperbel, wyl het verſchil der twee lynen, uit dit punt *m* tot in debeide brandpunten getoogen, niet gelyk is aan den eerſten as A*a* (gelyk weezen moeſt volgens §. 112). Dus raakt de lyn MT de hyperbel alleen in het punt M.

D. T. B. W.

GEVOLG.

§. 128. Uit dit Voorſtel volgt, dat de lynen Mf en MF van het raak-

(*a*) Eucl. XX: 1.

raakpunt M tot in de brandpunten F en *f* getoogen, met de raaklyn MT aan de zelvde zyde van MT genoomen, gelyke hoeken FMT en KM*m* maaken; want de ∨FMT is=∨*f*MT door de saamenstelling en ∨*f*MT=KM*m* (*c*); by gevolg zal de straal FM die uit het brandpunt F geschooten word tot eenig punt M, van de kromme lyn uit dat punt weeder gekaatst worden in de richting van KM, welke lyn KM naar de andere zyde verlengd zynde door het brandpunt *f* zoude gaan.

De voorgaande Oplossinge kan gebruikt worden om een raaklyn aan de kromme lyn te trekken gaande door een gegeeven punt op het vlak van de hyperbel (buiten dezelve geplaatst); gelyk men gedaan heeft voor de elips (§. 70). Deeze saamenstelling kan ook diënen om te onderscheiden of een punt *m* binnen, buiten of aan de hyperbel zelfs geplaatst is.

(*c*) Eucl, XV: 1.

BE-

BEPAALINGEN.

§. 129. Eerstelyk noemd men *Onder-raaklyn*, dat deel van den as *Aa* welke begreepen is tusschen het punt P van de ordinaat die door het raakpunt gaat en het punt T daar dien zelvden as *Aa* door de verlengde raaklyn gesneeden word. Ten 2e. de rechte RM die loodrecht op de raaklyn in het punt M staat en door den as in R gesneeden word, is de *Loodlyne* (*normale*). Ten 3e. is het deel PR van den as, (dat begreepen is tusschen het uitersten P van de ordinaat MP die door het raakpunt M gaat en het punt R van de loodlyne) de *Onder-loodlyne* (*sou-normale*) aan den as *Aa* genaamd.

IV. VRAAGSTUK.

§. 130. *Word gevraagd de analytische waardy van de onder-loodlyne* RP *op den grooten as* Aa. (Fig. 21.).

 OP-

OPLOSSING.

De rechte lynen MR en FD beiden ⊥ op de raaklyn MT ſtaande, zyn evenwydig aan elkander (*d*); dus zyn de △s fFD en fRM ∽, dierhalven is fD of $2a : fF$ of $2c$ = MD of MF of $\frac{cx}{a} - a$ (§. 118.): FR = $\frac{c^2x - a^2c}{a^2}$; en dewyl P tuſſchen A en F of voorby F vallen kan, zal men in 't eerſte geval het deel FP = $x - c$ van FR aftrekken, en in het tweede, moet het deel FP = $c - x$ tot FR gevoegd worden; waar door men in de beiden gevallen verkrygen zal PR = $\frac{c^2x - a^2c}{a^2} - \frac{a^2x + a^2c}{a^2} = \frac{(c^2 - a^2)x}{a^2}$; en ſtellende voor $c^2 - a^2$ de waardy b^2 (§. 117.), is RP = $\frac{b^2x}{a^2}$.

D. T. B. W.

(*d*) Eucl. XXVIII: 1.

I. GEVOLG.

§. 131. Dus zyn de onder-loodlyne PR en de absciſſe CP altoos tot elkander in de beſtendige *Reeden* van $\overline{CB}^2$ tot $\overline{CA}^2$; want uit de vergelyking PR $= \frac{b^2 x}{a^2}$ haald men deeze eevenreedigheid PR : $x =$ $b^2 : a^2$ of PR : CP $= \overline{CB}^2 : \overline{CA}^2$. Wanneer de hyperbel *Gelykzydig* (*æquilatère*) is, zal CP $=$ zyn aan PR (*e*) dewyl in dit geval de beiden aſſen aan elkander gelyk worden (§. 124).

II. GEVOLG.

§. 132. Het is niet moejelyk de onder-loodlyne aan den tweeden as (zynde Q*r*) te bepaalen, wanneer PR eens bekend is. Want de △ RPM is ∽ △ MQ*r* (*f*) en dus PR of $\frac{b^2 x}{a^2}$: PM of $y =$ MQ of

(*e*) Eucl. XIV, 5. (*f*) Eucl. Def. XXIX. 5.

of x: $Qr = \frac{a^2y}{b^2}$ waar uit gemakkelyk af te leiden is, (eeven als men voor den eersten as gedaan heeft) $CQ : Qr = \overline{CB}^2 : \overline{CA}^2$.

V. VRAAGSTUK.

§. 133. *Word gevraagd de analytische waardy van de onder-raaklyn* PT, *genoomen zynde op den eersten as* Aa. (Fig. 21.)

OPLOSSING.

De △ RMT rechthoekig zynde, geeft deeze eevenreedigheid PR: PM = PM: PT (g); by gevolg $PT = \frac{\overline{PM}^2}{PR}$; stellende in deeze waardy van PT, de analytische waardyen der lynen PM en PR, heeft men $PT = (x^2 - a^2)\frac{b^2}{a^2} \times \frac{a^2}{b^2x} = \frac{x^2 - a^2}{x}$.

D. T. D. W.

(g) Eucl. VIII: 6.

I. GE-

I. GEVOLG.

§. 134. Wanneer de analytische waardy der onder-raaklyn aan den eersten as gevonden is, zal het niet moejelyk weezen de onderraaklyn Qt aan den tweeden as te bepaalen; want de $\triangle^n$. PMT $\triangle QtM \backsim$ zynde zoo is PT : PM $=$ QM : Qt of analytisch $\frac{x^2-a^2}{x} : y = x : \frac{x^2 y}{x^2-a^2}$; maar (§. 123.) $x^2 = \frac{(y^2+b^2)a^2}{b^2}$, en $x^2 - a^2 = \frac{a^2 y^2}{b^2}$; stellende deeze waardyen voor x^2 en $x^2 - a^2$, vind men $Qt = \frac{(y^2+b^2)\,a^2}{b^2} \times \frac{b^2}{a^2 y^2} \times y$; of $Qt = \frac{b^2+y^2}{y}$.

II. GEVOLG.

§. 135. Zoo men van CP of x, de lyn PT of $\frac{x^2-a^2}{x}$ aftrekt, is $CT = \frac{a^2}{x}$; op dezelvde wyze zoo van $Qt = \frac{y^2+b^2}{y}$ de waardy $CQ = y$ afgetrokken word, is

$Ct = \frac{b^2}{y}$. Uit de vergelyking $CT = \frac{a^2}{x}$ heeft men $x : a = a :$ CT, of CP: CA = CA: CT; op de zelvde wyze uit de vergelyking $Ct = \frac{b^2}{a}$, komt $y : b = b : \frac{b^2}{y}$, of CQ: CB = CB: Ct. Het is gemakkelyk te zien hoe men zich van deze beide eevenreedigheeden bedienen kan, om een raaklyn MTt te trekken door een gegeeven punt M aan de hyperbel, gebruikende een van de assen. Want men heeft maar door het gegeeve punt M eene ordinaat MP of MQ te trekken, en vervolgens op de eersten of tweeden as een lyn CT of Ct te neemen derde eevenreedige (*h*) tot de absciffe CP of CQ en tot een van de halven assen CA of CB, en dan de punten M en T of M en t te zaamen te voegen door eene rechte lyn tTM, die de gevraagde raaklyn weezen zal.

III.

(*g*) Eucl. XI: 6.

III. GEVOLG.

§. 136. Zoo men in de vergelyking $CT = \frac{a^2}{x}$, x = fteld aan a en daar naa $x = \infty$; vind men in 't eerfte geval CT = CA en in het tweede CT = o; waar uit voortvloeid dat den eerften as en de raaklyn elkander nergens anders kunnen ontmoeten als in dat deel van den eerften as dat tuffchen A en C leid, en dat een raaklyn nimmer voor by het punt C vallen kan. Op de zelvde wyze indien 'er in de waardy van $Ct = \frac{b^2}{y}$, y = o gefteld word zal de lyn $Ct = \infty$ zyn; waar uit volgt, dat de raaklyn die door het punt A gaat den tweeden as Bb niet als in 't oneindigen ontmoet, en des zyn die twee lynen eevenwydig aan elkander (b); maar den tweeden as is loodrecht op den eerften; by gevolg is de raaklyn die door het punt A gaat, meede loodrecht op

(b) Eucl., Def. XXXV: 1.

op den grooten as Aa. De tweede onderstellinge dat $y = \infty$ is, geeft $Ct = \frac{b^2}{\infty} = 0$; dus weeder in dit geval gaat de raaklyn die een oneindige absciſſe heeft door het middelpunt.

IV. GEVOLG.

§. 137. Wanneer de analytiſche waardyen der lynen PR, PM, PT en CT bekend zyn is het gemakkelyk die der loodlyne RM, der raaklyn MT, van de lynen AR en AT of aR en aT en van CR te bepaalen. Want ten 1e. geeft de rechthoekigen △ RMP (*i*), $MR = \sqrt{\overline{MP}^2 + \overline{RP}^2} = \sqrt{(x^2 - a^2)\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^4 x^2}{a^4}}$

Ten 2e. de rechthoekigen △ MPT geeft $MT = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{PT}^2} = \sqrt{(x^2 - a^2)\frac{b^2}{a^2} + \left(\frac{x^2 - a^2}{x}\right)^2} = \frac{\sqrt{(x^2 - a^2)} \times \sqrt{b^2x^2 + a^2x^2 - a^4}}{ax}$.

Ten 3e. wanneer tot RP $\left(\text{die} = \text{is aan } \frac{b^2 x}{a^2}\right)$ de

(*i*) Eucl. XXXXVII: 1.

de lyn $AP = x - a$ of $aP = x + a$ gevoegt word, is $AR = \frac{b^2x + a^2x - a^3}{a^2}$ en $aR = \frac{b^2x + a^2x + a^3}{a^2}$. Ten 4^e^. indien de lyn CT van CA afgetrokken word, of CA tot CT gevoegt, is $AT = a - \frac{a^2}{x} = \frac{ax - a^2}{x}$, en $aT = \frac{ax + a^2}{x}$. Eindelyk ten 5^e^. zoo men tot CP of x de rechte PR of $\frac{b^2x}{a^2}$ by doet, is $CR = \frac{a^2x + b^2x}{a^2} = \frac{c^2x}{a^2}$. (dewyl c^2 = is aan $a^2 + b^2$ §. 117.)

V. GEVOLG.

§. 138. Op de zelvde wyze wanneer de analytische waardyen der lynen Qr, QM, Qt en Ct bekend zyn, zal het niet moejelyk zyn, (eeven als in het voorgaande Gevolg) om die der lynen Mr, Mt; Br, Bt of br, bt en Cr, alle op de tweeden as genoomen zynde, te bepaalen; want in de eerste plaats geeft de rechthoekigen △ M Qr, (*k*) $Mr = \sqrt{}$

(*k*) Eucl. XLVII, 1.

$\sqrt{\overline{MQ}^2 + \overline{Qr}^2} = \sqrt{(b^2+y^2)\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4y}{b^4}}$.

Ten 2e. geeft de rechthoekigen $\triangle MQt$ $Mt = \sqrt{\overline{MQ}^2 + \overline{Qt}^2} = \sqrt{(y^2+b^2)\frac{a^2}{b^2} + \left(\frac{b^2+y^2}{y}\right)^2} = \sqrt{(b^2+y^2)} \times \sqrt{\frac{a^2y^2 + b^2y^2 + b^4}{by}}$. Ten 3e. zoo men $BQ =$ aan $y-b$ tot Qr, of wel tot $bQ = y+b$ voegt, is Br of $br = \frac{a^2y + b^2y \mp b^3}{b^2}$. ($BQ$ moet van Qr afgetrokken worden wanneer het punt Q tusschen C en B valt). Ten 4e. indien de lyn CB tot Ct gevoegt of Ct van Cb afgetrokken word, wanneer het punt t tusschen C en b valt; of dat men Cb van Ct aftrekt, wanner het punt t voor by b valt (van C afgereekend), vind men Bt of $bt = \frac{\pm b^3 \pm by}{b^2}$. Eindelyk ten 5e. wanneer tot CQ of y de lyn Qr geteld word, is $Cr = \frac{b^2y + a^2y}{b^2} = \frac{c^2y}{b^2}$.

AANMERKINGE.

§. 139. Alle deeze nu gevondene lynen kunnen gebruikt worden om een raaklyn aan de hyperbel te trekken, het zy door behulp van den eersten, of van den tweeden as; doch men gebruikt meestendeels de lynen CT, PT, AT of aT aan den eersten as en haare gelystandige aan den tweeden; om dat deeze lynen veeltyds de eenvoudigste en gemakkelykste oplossingen geeven. Men zoude voor deeze lynen, andere analytische waardyen kunnen verkrygen, gebruik maakende van de parameeters der beide assen. Doch wy zullen ons niet langer hier meede ophouden. De eerstbeginners kunnen niets beeter doen, als zich hier in te verleedigen, dewyl dit op zich zelvs genoomen in 't minst niet moejelyk is.

Van de eigenschappen der hyperbel weegens haare Assymptoten of Misloopers beschouwt, van welke men ook de eigenschappen van die kromme lyn afleid weegens haar diameeters of middel-lynen.

BEPAALINGEN.

§. 140. Een raaklyn welke de hyperbel niet ontmoet dan op eene oneindigen afstand van de kruin, word *Assymptote* of *Mislooper* genaamd.

VI. VRAAGSTUK.

§. 141. *Word gevraagt de misloopers aan de hyperbel te bepaalen* (Fig. 22).

OPLOSSING.

Wy hebben reets gezien (§. 136.) dat wanneer in de waardy van $CT = \frac{a^2}{x}$, $x =$ aan 't ∞ gesteld word, is $CT =$ aan o; dat is te zeggen dat het middel-

delpunt C, een misloopers punt is (naamentlyk, dat den mislooper door het punt C gaan moet). Om nu noch een punt van die lyn te vinden, zoo richt op uit het punt A eene ⊥AR, gesneede wordende door een raaklyn (naa gevalle genoomen) in het punt R, en zoekt de analytische waardy van AR door de twee △ⁿ TPM en ATR, die ∽ zynde deeze eevenreedigheid geeven, PT of $\frac{x^2-a^2}{x}$: PM of $\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ = AT of $\frac{ax-a^2}{x}$: AR $=\frac{b\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}}$. Zoo men nu in deeze waardy van AR, de grootheid x = aan 't ∞ stelt; worden de noemer en teller van de breuk aan elkander gelyk, en AR word hier door $=b$; het welke deeze Saamenstelling voor de misloopers geeft. Laat aan beide de zyden van de kruin A van een der hyperbels twee lynen AD en Ad genoomen worden, ieder gelyk aan CB, weederzyds loodrecht staande op den grooten as; trekt vervolgens door het middelpunt C en de

pun-

punten D en *d* de twee rechte lynen CD en C*d*; die de gevraagde misloopers weezen zullen.

D. T. D. W.

III. GRONDLES.

§. 142. *Indien 'er door eenig stip* M (Fig. 22.) *van een der teegen-oouerstaande hyperbels eene rechte lyn* GMmF *of* MGFm, *getoogen word eevenwydig aan een der assen, en bepaald wordende door de misloopers in de punten* G *en* F, *is* $MG \times MF = \overline{CB}^2$ *of* $\overline{AD}^2$, *en* $MG \times MF = \overline{CA}^2$.

BETOOGINGE.

1°. De △CAD ∽ zynde aan de △CPG; zoo is $\overline{AD}^2 : \overline{PG}^2 = \overline{CA}^2 : \overline{CP}^2$; de lyn PM is eene ordinaat aan den eersten as A*a*; dus $\overline{CB}^2$ of $\overline{AD}^2 : \overline{PM}^2 : = \overline{CA}^2 : \overline{CP}^2 - \overline{CA}^2$; dewyl nu deeze beide eevenreedigheeden dezelvde *antecedenten* hebben, zyn hunne *consequen-*

ten

ten ook eevenreedig tot elkander (*l*); dus $\overline{PG}^2 : \overline{PM}^2 :: \overline{CP}^2 : \overline{CP}^2 - \overline{CA}^2$; en deelende (*m*) $\overline{PG}^2 - \overline{PM}^2 : \overline{PG}^2 = \overline{CA}^2 : \overline{CP}^2 = \overline{AD}^2 : \overline{PG}^2$, om dat de $\triangle^s$ CAD en CPG ∽ zyn; maar $\overline{PG}^2 = \overline{PG}^2$; by gevolg ook $\overline{PG}^2 - \overline{PM}^2$ of $MF \times MG = \overline{AD}^2$ (*n*).

D. T. B. W. ten 1e.

2e. Wanneer de lyn M*m* eevenwydig aan den eersten as is, zal de △CBD ∽ zyn aan de △ CQG (*o*); en dus $\overline{BD}^2 : \overline{GQ}^2 = \overline{CB}^2 : \overline{CQ}^2$; de lyn QM eene uitwendige ordinaat zynde, is $\overline{CA}^2$ of $\overline{BD}^2 : \overline{QM}^2 = \overline{CB} : \overline{CB}^2 + \overline{CQ}^2$ (§. 121); wyl dan deeze beide eevenreedigheeden dezelvde *antecedenten* hebben, zullen hunne *consequenten* meede in eevenreedigheid zyn, dat is $\overline{QM}^2 : \overline{QG}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CQ}^2 : \overline{CQ}^2$

(*l*) Eucl. XVI en XI: 5. (*m*) Eucl. XVII: 5.
(*n*) Eucl. XIV: 5. (*o*) Eucl. II: 6.

$\overline{CQ}^2$, en deelende $\overline{QM}^2 - \overline{QG}^2 : \overline{QG}^2 = \overline{CB}^2 : \overline{CQ}^2 = \overline{BD}^2$ of $\overline{CA}^2 : \overline{GQ}^2$; maar $\overline{GQ}^2 = \overline{GQ}^2$; dus ook $\overline{QM}^2 - \overline{QG}^2$ of $MF \times MG = \overline{CA}^2$.

D. T. B. W. ten 2e

GEVOLG.

§. 143. Hier uit volgt ten 1e Dat de hyperbel en haare mislooper elkander gestaadig naaderen zonder zich ooit te raaken; of het geene op 't zelvde uitkomt, dat MG nooit gelyk kan zyn aan nul, want dan zoude de waardy $MG \times MF = 0 = \overline{AD}^2$ zyn; dat niet moogelyk is. Om verders een klaarder denkbeeld van deeze eigenschap der hyperbel te vormen, moet men acht geeven dat MG kleinder word naar maate MF aangroeit, en dus wanneer MG = is aan $\frac{1}{\infty}$, zal $MF = \infty$ zyn; by gevolg $MG \times MF = \frac{\infty \times 1}{\infty} = 1$, of $\overline{AD}^2$, dewyl de eenheid in dit geval onbepaald zyn-

zynde, gelyk aan $\overline{AD}^2$ kan gesteld worden. Ten 2e. zyn de lynen MG, *m*F of *m*G, MF gelyk aan elkander ieder aan ieder; want men kan op dezelvde wyze betoogen, dat *m*G×*m*F = $\overline{AD}^2$ is, en buiten dat zyn de ordinaaten MP, *m*P aan elkander gelyk (§. 114).

IV. GRONDLES.

§. 144. *Indien 'er door twee stippen* M *en* N (Fig. 23.) *op een der oover-staande hyperbels twee lynen* ML *en* NI *eevenwydig aan elkander getoogen worden bepaald zynde door een zelvde mislooper* CL *in* L *en* l; *en uit die zelvde stippen* M *en* N *noch twee andere rechte lynen* MK *en* NH, *ook eevenwydig aan elkander en beide bepaald wordende door den anderen mislooper* CH, *is* MK × ML = NH × NI.

BETOOGINGE.

Laat 'er door M en N getoogen worden de rechte lynen GMF en *g* N *f* eeven-

venwydig aan den tweeden as, bepaald zynde door de misloopers in de ſtippen G, F, g, en f. De lynen LM en IN eevenwydig aan elkander zynde als meede GM en gN, maaken de △ⁿ. LGM en IgN, ∽ (p), dus is LM; IN = GM: gN; op de zelvde wyze de lynen MF en Nf eevenwydig aan elkander zynde als meede MK en NH, zoo zyn de △ⁿ. MFK en NfH ook ∽; dus MK : NH = MF: Nf; vermeenigvuldigende dan deeze twee eevenreedigheeden met elkander, heeft men LM×MK: IN×NH = GM ×MF: gN×Nf; maar GM×MF is = gN×Nf (§. 142.); dus ook LM× MK = IN×NH (q).

D. T. B. W.

I. GEVOLG.

§. 145. Geſteld zynde dat de lynen LM en IN, om de ſtippen M en N draaijen tot zy zich in de richting van

(p) Eucl. XXVIII, 1. en IV. 6. (q) Eucl. XIV. 5.

van MK en NH bevinden en in de lynen M*k* en N*h* veranderen, dan heeft men MK×M*k*=N*h*×NH; en zoo 'er noch gesteld word, dat een van deeze lynen, (K*k* by voorbeeld) eevenwydig aan zich zelfs beweegt, tot die in een raaklyn in het punt A verandert; zullen de deelen AD en A*d*, aan elkander gelyk worden; dewyl de lynen PK, P*k*; MK en *m*K het altoos zyn. Zoo dat hoe groot den hoek ook zyn mag die deeze eevenwydige lynen K*k* en *h*H met den as maaken, zal doch altoos MK× M*k*=NH×N*h*=$\overline{AD}^2$ zyn.

II. GEVOLG.

§. 146. Uit deeze Grondles word 'er eene gemakkelyke manier afgeleid, om een raaklyn aan de hyperbel te trekken, van welke de misloopers bekend zyn. Laat A het punt zyn aan welke een raaklyn begeert word. Trekt door dat punt A en het middelpunt C eene rechte lyn AC

en noch eene rechte AE eevenwydig aan de mislooper CF; neemt op den andere mislooper CL een deel DE=CE, eindelyk trekt door D en het gegeeve punt A eene rechte lyn DA*d*, welke de gevraagde raaklyn weezen zal; want om dat AE en C*d* eevenwydig aan elkander zyn; zullen de rechte lynen CD en D*d* eevenreedig gesneeden zyn (*q*). By gevolg is D*d* in twee gelyk gesneeden in A, wyl CD het in E is. Dus zal DA*d* de raaklyn van het punt A zyn, door het voorgaande (§. 145).

BEPAALINGEN.

§. 147. Men noemd *Meede-diameter* (*diametrés conjugués*) van de ooverstaande hyperbels, de rechte lynen A*a* en D*d* (*Fig.* 23.) van welke den eersten A*a* door het middelpunt C gaat en bepaald word aan beide de zyden door de ooverstaande hyperbels, en de tweede D*d* een

(*q*) Eucl. II, 6.

een der hyperbels in het uiterſten van de lyn A*a* aanraakt, bepaald zynde door de beide misloopers. Indien 'er door het middelpunt C eene rechte CQ getoogen word, eevenwydig aan de raaklyn die door A gaat, en aan beide de zyden van C de deelen CB en C*b* genoomen worden, ieder gelyk aan AD, zullen de rechte lynen A*a* en B*b* ook *meede-diameeters* genaamd worden.

§. 148. De lynen MP*m* die eevenwydig getoogen zyn aan de raaklyn AD en weederzyds door de hyperbel bepaald worden, zyn dubbelde *Ordinaaten* aan den diameeter A*a*. Het is zichtbaar dat deeze ordinaaten in twee geſneeden worden door dien verlengde A*a*, want AD = A*d* zynde zoo is PK = P*k*, daar by is M*k* = *m*K, dus zal PM = P*m* zyn. De deelen AP, en *a*P, enz. van den diameeter, begreepen tuſſchen de uiterſtens van dezelve en het punt daar de ordinaat ſnyd, zyn de *Abſciſſen* van die ordinaat.

GEVOLG.

§. 149. Uit het voorgaande volgt, dat wanneer twee meede-diameeters in de hyperbel aan elkander gelyk zyn, zullen alle de anderen het ook weezen; en de misloopers van die hyperbels (die in dit geval *Gelykzydig* zyn §. 124.) zullen elkander rechthoekig doorsnyden. Want AC = AD zynde, en CE = DE; zoo zullen in de △^n CEA en DEA (die AE gemeen hebben, en in alles met elkander overeenkoomen en daarom gelyk zyn. *r*) de hoeken DEA en CEA aan elkander gelyk weezen; dus zyn die hoeken recht (*s*) en by gevolg snyden de misloopers elkander rechthoekig, dewyl C*d* eevenwydig is aan EA. En verder wanneer de hyperbels niet *Gelykzydig* zyn, dan kunnen de meede-diameeters in dezelve ook niet gelyk aan elkander zyn; en omgekeert.

V.

(*r*) Eucl. VIII: 1. (*s*) Eucl. XIV: 1.

V. GRONDLES.

§. 150. *Het vierkant* $\overline{PM}^2$ (Fig. 23.) *van eene ordinaat* PM *aan den diameeter* Aa, *ſtaat tot den rechthoek* $AP \times aP$ *haarer absciſſen; gelyk het vierkant op* AD *of* CB, *ſtaat tot het vierkant van den halven diameeter* CA *op welke de absciſſen genoomen zyn.*

BETOOGINGE.

De ∽ Δ^n CAD en CP*k* geeven deeze eevenreedigheid $\overline{Pk}^2 : \overline{AD}^2 = \overline{CP}^2 : \overline{CA}^2$; maar (§. 144 en 145) $\overline{AD}^2 = Mk \times MK$ of $\overline{Pk}^2 - \overline{PM}^2$; ſtellende dan deeze waardy voor $\overline{AD}^2$ in de eevenreedigheid heeft men $\overline{Pk}^2 : \overline{Pk}^2 - \overline{PM}^2 = \overline{CP}^2 : \overline{CA}^2$ (*t*), en deelende deeze, is $\overline{Pk}^2 - \overline{Pk}^2 + \overline{PM}^2 : \overline{Pk}^2 - \overline{PM}^2$

(*t*) Eucl. VII: 5.

$\overline{PM}^2 = \overline{CP}^2 - \overline{CA}^2 : \overline{CA}^2$ (v), of wel $\overline{PM}^2 : \overline{Pk}^2 - \overline{PM}^2 = \overline{CP}^2 - \overline{CA}^2 : \overline{CA}^2$; maar $\overline{Pk}^2 - \overline{PM}^2$ is $= \overline{AD}^2 = \overline{CB}^2$; ſtellende dan deeze waardy $\overline{CB}^2$ voor $\overline{Pk}^2 - \overline{PM}^2$ en verwiſſelende, is $\overline{PM}^2 : \overline{CP}^2 - \overline{CA}^2$ of $aP \times AP = \overline{CB}^2 : \overline{CA}^2$ (q).

D. T. B. W.

I. GEVOLG.

§. 151. Wanneer AC of $aC = a$ geſteld word; CB of $Cb = b$; $CP = x$, en $PM = y$; heeft men $y^2 : x^2 - a^2 = b^2 : a^2$, waar uit voortkomt $y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2$; een vergelyking, welke zoo wel den aart der hyperbels weegens haare diameeters aanwyſt, als weegens haare aſſen, en ook teffens dienen kan om die kromme lyn te beſchryven, wanneer den hoek die de meede-diameeters met elkander maaken gegeeven is.

II.

(v) Eucl. XVII; 5. (q) Eucl. XVI; 5.

II. GEVOLG.

§. 152. Uit dit voorgestelde volgt, dat de eigenschappen van de meede-diameeters, eeven de zelvde zyn, als die van de assen. By gevolg geeft iedere uitwendige ordinaat MQ aan de tweeden diameeter deeze waardy $\overline{MQ}^2 : \overline{CB}^2 + \overline{CQ}^2 = \overline{Ca}^2 : \overline{CB}^2$; (*Fig.* 23.) want uit de vergelyking $y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2$ haalt men deeze eevenreedigheid $x^2 : b^2 + y^2 = a^2 : b^2$. Verder volgt hier nog uit, dat de raaklyn voor een gegeeven punt M meede bepaalt kan worden door middel van een diameeter CP, en eene ordinaat die door het punt M aan dezelve getrokken is, maakende deeze eevenreedigheid C P: C a = C a: CT (§. 135.) want men kan een hyperbel die weegens haar meede-diameeters beschouwt is aanmerken als gemaakt zynde van eene andere hyperbel die, die zelvde diameeters voor assen gehad heeft

en van welke den tweeden as en alle de ordinaaten eene gelyke neiging tot den eersten as bekoomen hebben; en dus moet de raaklyn aan die nieuwe kromme lyn op de zelvde wyze bepaald worden als de voorgaande, dewyl men zich dan in het zelvde geval bevind als dat van het Voorbewys §. 88.

BEPAALINGE.

§. 153. Indien 'er door het uiterften A (*Fig.* 23.) van een diameeter, twee rechte lynen AE en A*e* getoogen worden, eevenwydig aan de miskoopers, bepaald wordende door die zelvde lynen; zal de hier uit koomende *paralelogram* CEA*e* de *Macht* of het *Vermoogen* van de hyperbels genaamt worden.

VI. GRONDLES.

§. 154. *Zoo men door twee ftippen* M *en* N *op de ooverftaande hyperbels de rechte lynen* MR, ML; NO en NI *trekt*, *bepaald*

wor-

wordende door de misloopers en eevenwydig zynde aan dezelve ; zal ML × MR = NO × NI *zyn* (Fig. 23).

BETOOGINGE.

Dit Voorſtel is maar een byzonder geval van de vierde Grondles en word op de zelvde wyze betoogt. Men heeft dat van (§. 144.) maar te leezen en de △ⁿ MRF en NO*f* in plaats van de △ⁿ MFK en N*f*H te ſtellen.

D. T. B. W.

I. GEVOLG.

§. 155. Hier uit volgt dat de *paralelogrammen* CRML en CONI gelyk zyn aan elkander en aan de *Macht* der hyperbel (*o*), want zy hebben eenen gelyken hoek, begreepen tuſſchen hunne weederkeerige zyden; dewyl men uit de vergely-

(*o*) Eucl. XIV: 6.

lyking $ML \times MR = NO \times NI = AE \times Ae$ deeze eevenreedigheeden haald $ML : NO = NI : MR$; $ML : AE = Ae : MR$, en $NO : AE = Ae : NI$.

II. GEVOLG.

§. 156. Wanneer de beſtendige $CE = a$ geſteld word, $AE = b$, de onbepaalde $CL = x$, en $ML = y$; heeft men altoos $xy = ab$, en neemende c voor midden eevenreedige tuſſchen a en b, is $xy = c^2$. Welke een nieuwe *Hyperbels Vergelyking* is, beſchouwt weegens haare misloopers. Uit deeze vergelyking haald men $y = \frac{c^2}{x}$ of $y = c^2 x^{-1}$. Zoo men $x = 0$ ſteld, word $y = \frac{c^2}{0}$, dat een oneindige grootheid is; waar uit blykt dat y in dit geval zich met de mislooper zelvs vereenigt. Op de zelvde wyze wanneer $x = \infty$ is, zal $y = \frac{c^2}{\infty}$ zyn; welke een oneindige kleine waardy voor y geeft. Meenigmaal ſteld men de beſtendige c^2 =

$=$ aan de eenheid, en dan word de vergelyking van de hyperbel weegens de misloopers beschouwt deeze $y = x^{-1}$.

III. GEVOLG.

§. 157. Het is gemakkelyk te zien, dat 'er in de twee hoeken Δ C D en δ C d naast aan den hoek D C d geleegen, twee nieuwe oovèrstaande hyperbels B$\mu\upsilon$ en $\gamma k \phi$ kunnen beschreeven worden door middel van de twee machten CEBε, en Cεbη, (welke ieder gelyk zyn aan de macht AECe) neemende op de verlengde lynen ML en NI, de deelen μL, νI, gelyk aan de ordinaaten ML en NI; deeze twee nieuwe ooverstaande hyperbels hebben de naam van *ooverstaande meede-hyperbels* met de twee voorgaande. En omgekeert; zullen de twee eerste ooverstaande, *meede ooverstaande hyperbels* van deeze laatsten zyn. Dewyl nu de voortbrenginge van deeze, eeven de zelvde is als die der twee anderen, zullen zy ook de zelvde eigenschappen hebben. En alle vier

vier deeze hyperbels zullen aan elkander gelyk en gelykvormig weezen, wanneer haare assen gelyk zyn; of het geene op het zelvde uitkomt, wanneer de misloopers met elkander rechte hoeken maaken; of wanneer twee ooverstaande hyperbels *Gelykzydig* (*equilatere*) zyn. (§. 149.)

IV. GEVOLG.

§. 158. Zoo men op twee meedediameeters Aa, en Bb, een *paralelogram* DΔδd maakt; is het klaar te zien, dat de macht CEAe 'er de achtste part van is; maar deeze macht zoude ook de achtste part zyn van den rechthoek der beide assen; indien 'er verondersteld wierd dat Aa en Bb de assen van de ooverstaande hyperbels waaren. Buiten dat, zyn deeze onderscheide machten ieder gelyk aan een *paralelogram* CLMR (§. 155). Dus zyn deeze machten ook aan elkander gelyk; en by gevolg zyn alle de *paralelogrammen* tusschen de vier

hy-

hyperbels beschreeven, gemaakt wordende door twee meede-diameeters, aan elkander gelyk als meede aan den rechthoek der assen.



VYFDE HOOFTDEEL.

Van de Eigenschappen welke de drie Keegelsneeden met elkander gemeen hebben.

IN de voorgaande Hooftdeelen hebben wy eerst van de Parabel gehandeld, vervolgens van de Elips en toen van de Hyperbel, in dit Hooftdeel zullen wy inzonderheid de twee laatsten deezer kromme lynen beschouwen, en wy zullen 'er de eigenschappen der parabel van afleiden, om dat men deeze als een midden tusschen de elips en de hyperbel kan aanmerken, gelyk in 't vervolg getoont zal worden.

BEPAALINGEN.

§. 159. Zy gegeeven een Vlak (*Fig.* 24 en 25), op het zelve eene onbepaalde rechte lyn RDT (welke ik *Leidslinie* noemen zal) en een punt F buiten die lyn (dat *Brandpunt* genoemd word). Zoo 'er een oneindig aantal stippen M, M, M, enz. op dat gegeeve Vlak genoomen worden, zoodanig dat hunne afstanden tot het brandpunt en de leidslinie altoos tot elkander in eene bestendige *Reeden* zyn, zullen de kromme lynen welke door deeze reeks van op zoodaanig een wyze gevondene stippen getoogen worden, *Keegel-sneeden* genaamd zyn (z).

§. 160.

(z) Het oog-punt waar onder men hier de drie Keegel-sneeden beschouwt, kan op een veel algemeener wyze aangemerkt worden en op welke ik niet geloof dat tot hier toe gedagt is geweest, hier in bestaande; dat in plaats van het brandpunt F op het Vlak van de lyn RDT te plaatzen kan men het zelve veronderstellen daar buiten te staan; in welke veronderstelling alle de stippen op de voorschreeve wyze gevonden eeven-

wel

§. 160. Wanneer de betrekking welke tusschen de lynen MF en MR is, altoos kleiner gesteld word als MR, zal die kromme lyn een *Elips* zyn; die in een cirkel verandert wanneer de lyn MR oneindig groot gesteld word in vergelyk van MF, om dat dan alle de lynen MF gelyk aan elkander zyn.

§, 161. Indien de lyn MF altoos grooter is als MR, zal de kromme lyn een *Hyperbel* weezen.

§. 162. Wanneer MF gelyk is aan MR, zal de kromme lyn een *Parabel* zyn. Welke Bepaalinge eeven dezelvde is als die, van §. 18.

§. 163. Wy noemen *As* van de Keegelsneede, eene rechte lyn DF, welke door het brandpunt gaat en loodrecht op de Leidslinie staat; en *Kruinen* van de Keegelsnee-

wel tot een der Keegel-sneeden zullen behooren. Wy zullen ons niet ophouden met zulks hier te betoogen, wyl het ons te ver zoude afleiden van ons voornaam oogmerk.

fneede, de punten A en *a* daar de kromme lyn A*m* den as A*a* fnyd.

I. VRAAGSTUK.

§. 164. *Gegeeven zynde de beſtendige Reeden die 'er tuſſchen de afſtanden* MF *en* MR *is, word gevraagd de kruinen van iedere Keegelſneede te bepaalen; of het geene op 't zelvde uitkomt de lengte van den voornaamen as* Aa.

OPLOSSING.

Trekt door het punt F eene rechte lyn *l*FL den as FD rechthoekig fnydende; neemt op die lyn een deel FL, zoodaanig dat FL tot FD in de gegeeve *Reeden* zy; trekt vervolgens een onbepaalde lyn DL, en door het brandpunt F twee rechte lynen FG en F*g* maakende ieder met den as een hoek van 45°; verlengd die lynen tot zy de regte DL in twee ſtippen G en *g* ontmoeten; laat uit de ſtippen G en *g* twee loodrechte

te GA en *ga* op den as D*d* vallen, en de ſtippen A en *a* van deeze twee lynen zullen de gevraagde kruinen weezen. Want in de gelykbeenige en rechthoekigen △ⁿ FAG en F*ag*, is de lyn AF = AG en *a*F = *ag*, de △ⁿ DFL, DAG en D*ag* geeven deeze eevenreedigheeden FD : FL = AG of AF : AD = *ag* of *a*F : *a*D, dat is te zeggen, dat de afſtanden FA, AD; F*a* en *a*D der gevonden ſtippen A en *a* tot het brandpunt F en de Leidslinie DR in eene beſtendige *Reeden* zyn, dewyl de lynen FD en FL (door de ſaamenſtelling die zelvde beſtendige *Reeden* tot elkander hebben.

D. T. D. W.

I. GEVOLG.

§. 165. Dewyl in de parabel de lyn FL = aan de lyn FD is (§. 162.), zoo maakt de lyn LD met den as een hoek van 45°. en dus is F*g* eevenwydig aan DL; by gevolg kan deeze kromme lyn maar eenen kruin hebben; indien nu de

eevenwydige lynen aanmerkt worden als te ſaamen loopende in het oneindige (onderſtellende dat zy het byderzyds doen kunnen) volgt 'er dat de parabel zoo wel tot het geſlagt van de elips behoord als tot dat van de hyperbels.

II. GEVOLG.

§. 166. Dus zal de Keegel-ſneede eene Elips, eene Hyperbel of eene Parabel zyn, naar maate dat haar kruin digter of verder, of eeven zoo ver van de Leids-linie afſtaat als van haar brandpunt.

III. GEVOLG.

§. 167. Uit het hier booven gezegde volgen dan deeze drie dingen, naamentlyk, dat zoo 'er van het brandpunt F, de kruinen A of *a* en de Leidslinie, twee bekend zyn kan de derde altoos gevonden worden. Want eerſtelyk heeft men zoo eeven gezien hoe door middel van een brandpunt en van de Leidsline, de krui-

nen

nen verkreegen worden. Ten 2e zoo de Leidslinie en de kruinen A en *a* gegeeven zyn beneevens de eevenreedigheid die 'er tusschen de lynen MF en MR zyn (welke altoos veronderſteld word bekend te weezen) zal 'er door het punt A eene rechte lyn AG getoogen moeten worden, welke tot de rechte AD in de gegeeve beſtendige *Reeden* zy; vervolgens nog een lyn DGL; als meede de rechte GF, maakende met AG een hoek van 45°, en dan zal het punt F het gevraagde brandpunt zyn. Ten 3e wanneer de kruinen A en *a* gegeeven zyn als meede het brandpunt F, zal men op den as twee loodrechten AG en *ag* op richten gelyk aan AF en *a*F ieder aan ieder, en vervolgens door de uiterſtens G en *g* van deeze loodrechten, een lyn *g*G, ontmoetende den as in D, welk punt D een punt van de Leidslinie weezen zal.

IV. GEVOLG.

§. 168. Uit het hier voorens gezegde volgt nog, dat men voor de elips en voor de hyperbel altoos twee brandpunten F en *f* en twee Leidslinien DR en *dr* vinden kan, wyl men niet meer bevoegt is de lyn AF naar de kant van 't punt A te neemen dan om het *a*F = AF naar de zyde van *a* te doen; derhalven is het onverschillig welke van beiden genoomen word. Het brandpunt F geeft de Leidslinie DR, wanneer men AD tot AF neemt in de gegeeve bestendige *Reeden*; en de andere Leidslinie *dr* die naar de kant van *a* valt, word verkreegen wanneer men op den verlengden as het deel *ad* tot *af* neemt in die zelvde bestendige *Reeden*.

II. VRAAGSTUK.

§. 169. *Gegeeven zynde den grooten as* A *a van eene Keegel-sneede en de Reeden die 'er tusschen de afstanden* MF *en* MR *is; word gevraagt de analytische waardy der*

de afstand AF *van het brandpunt* F *tot aan de kruin* A, *te bepaalen.*

OPLOSSING.

Laat den grooten as A$a = 2a$ zyn, (*Fig.* 24.) en laat de *Reeden* die 'er tusschen MF en MR is gelyk zyn aan de *Reeden* van m tot n, laat ook AF $= x$ zyn, en aF $= 2a - x$. Dewyl nu A een punt aan de kromme lyn is, heeft men $m : n =$ AF of x : AD of $\frac{nx}{m}$, en daarom aD $= 2a + \frac{nx}{m}$; de kruin a ook een punt aan de kromme lyn zynde, is wederom $m : n = a$F of $2a - x$: aD of $2a + \frac{nx}{m}$; dus $x : \frac{nx}{m} = 2a - x : 2a + \frac{nx}{m}$, (†) of $m : n = (2a - x)\, m : 2am + nx$, en by gevolg $x = \frac{a(n-m)}{n}$.

D. T. D. W.

GE-

(†) Eucl. XI: 5.

GEVOLG.

§. 170. Zoo men m kleinder ſteld te zyn als n (gelyk het in de elips is) zal de waardy van x een ſtellige grootheid zyn; wanneer in teegendeel m grooter is als n (gelyk in de hyperbel), zal x ontkennend zyn; (in dit geval moet AF op den verlengden as voorby het punt A genoomen worden). Eindelyk indien $m = n$ is, verandert de waardy $\frac{a(n-m)}{n}$ in $\frac{a \times 0}{n}$ of ſtellende $n = 1$, in $a \times \frac{0}{1}$; in welk geval de kromme lyn een parabel is en de grootheid a oneindig. Daar by is $\frac{0}{1} = 0$ of $\frac{1}{\infty}$; dus $x = \infty \times \frac{1}{\infty} = 1$. Dat is te zeggen dat den afſtand AF in dit geval altoos gelyk aan de eenheid kan genoomen worden.

III. VRAAGSTUK.

§. 171. *Het voorgaande geſteld zynde, word gevraagd om de drie Keegel-ſneeden op eene*

eene en zelvde algemeene wyze te beſchryven; of het geene op 't zelvde uitkomt om zoo veel punten M, M *en* m, m *aan de drie Keegelſneeden te bepaalen als men begeert* (Fig. 24 en 25).

OPLOSSING.

Trekt door eenige ſtippen P, P, (naa gevalle op den as AP genoomen) de onbepaalde loodrechten PL, PL, enz. naar de kant van *l*, en laat dezelve alle aan de rechte lyn DGL aanſtooten; vervolgens beſchryft uit het punt F als middelpunt met een ſtraal gelyk aan iedere PL, eenige cirkel-boogen die iedere lyn *l*PL in twee punten M, en *m* zullen ſnyden, de welke, alle punten M, *m*, van de gevraagde ſneede weezen zullen. Om dit te Betoogen zy getrokken de lyn MR, loodrecht op de Leidslinie DT; dan is MR = PD; en door de ſaamenſtelling is MF = PL; dus MR : MF = PD : PL; en PD : PL = AD : AG (om dat de △LPD ∽ is aan de △GAD); dat is te zeggen dat de afſtanden MR en MF

van elk ſtip M tot de Leidslinie en tot het brandpunt in de beſtendige gegeeve *Reeden* zyn, dewyl AD en AG, of PD en PL deeze *Reeden* tot elkander hebben door de ſaamenſtelling (§. 164).

D. T. D. W.

I. GEVOLG.

§. 172. Dewyl de lynen PL, PL of haare gelyke FM, FM op de zelvde wyze aangroeijen als de △*ga*D, volgt 'er, dat die aangroeing in een *telkunſtige progres* geſchied, en by gevolg moeten haare ſommen (dat is PL+PL) op gelyken afſtand van de kruinen A en *a* beſtendige grootheeden zyn, en ieder gelyk aan AG+*ag*. In de elips (*Fig.* 24.) zullen deeze lynen PL en PL enz. altoos een weezentlyke ſom maaken, om dat deeze lynen altyd aan dezelvde zyde in vergelyk van den as zyn. In teegendeel zal de genoome ſom van de twee PL op gelyken afſtand der kruinen A en *a* (*Fig.* 25.) en beide aan dezelve lyn GL bepaald,

ei-

eigentlyk een verſchil zyn, om dat wanneer een van deeze lynen een ſtellige grootheid is, den andere ontkennend genoomen moet worden, door dien zy aan verſchillende zyden van den as *Aa* ſtaan.

II. GEVOLG.

§. 173. Dewyl in de elips en in de hyperbel, ieder punt M bepaald kan worden door middel van de Leidslinie DR en het brandpunt F, als meede door de Leidslinie *dr* en het brandpunt *f*, is de ſom der afſtanden MF en M*f* in de elips, en het verſchil van die lynen in de hyperbel altoos gelyk aan den eerſten as *Aa*. Want doordien het punt M bepaald is geworden door middel van het brandpunt F en van de Leidslinie DR, is MF=PL; maar het zelvde punt M had ook bepaald kunnen worden door het brandpunt *f* en de Leidlinie *dr*; in welk geval weederom M*f*=P*l* zoude geweeſt zyn, by gevolg is voor de elips

en

en voor de hyperbel altoos $Mf \pm MF = Pl \pm PL = Ll$ of $GE = Aa$, dewyl $AG = AF$ en $AE = aF$ is.

III. GEVOLG.

§. 174. Deeze twee eigenſchappen zyn ook in de parabel, wanneer men aan die kromme lyn twee brandpunten geeft ſtaande in een oneindigen afſtand van elkander (beide binnen de kromme lyn zoo als in de elips; of het eene binnen en het andere buiten dezelve, gelyk in de hyperbel) in welk geval de ſom der afſtanden MF en Mf in de eerſte plaats, en hun verſchil in de tweede, altoos gelyk zal zyn aan den as van de parabel; dien as oneindig zynde door de veronderſtelling.

IV. VRAAGSTUK.

§. 175. *Bekend zynde in de elips of in de hyperbel den grooten as* Aa *(die wy gelyk ſtellen aan* 2a*) en den afſtand* AF *van de kruin*

A

A tot het brandpunt F, (*welke wy gelyk* c *stellen*) *word gevraagd den afstand* AD *van de kruin* A *tot aan de Leidslinie* DR *van die kruin.*

OPLOSSING.

Laat de rechte lyn $AD = x$ gesteld worden, dan zal aD gelyk zyn aan $2a \pm x$, (het bovenste teeken is altyd voor de elips en het onderstên voor de hyperbel). De lyn $AF = c$ zynde, is AG (gelyk AF door §. 164.) ook $= c$, en aF of $ag = 2a \mp c$; dit gesteld zynde heeft men, (om dat den $\triangle DAG \backsim \triangle Dag$ is) $AG : AD = ag : aD$, of $c : x = 2a \mp c : 2a \pm x$; waar uit voortkoomt $x = \frac{ac}{a \mp c}$. Door dien in de parabel $a = \infty$ is, vermeerdert nog vermindert de grootheid a niet het zy men tot dezelve de grootheid c toeteld, of van dezelve aftreckt, dus is de waardy van $x = \frac{ac}{a} = c$, gelyk men reeds geleerd heeft §. 18.

D. T. D. W.

V.

V. VRAAGSTUK.

§. 176. *Word gevraagt de vergelyking der drie Keegel-sneeden, wanneer de oorspronken der abscissen in de kruin* A *genoomen zyn.* (Fig. 24 en 25).

OPLOSSING.

De △ DAG ∽ aan △ DPL zynde, zoo is AD: AG = DP: PL, of analytisch $\frac{ac}{a \mp c} : c = \frac{ac}{a \mp c} + x : \mathrm{PL} = \frac{ac + ax \mp cx}{a}$, behalven dat, is in de elips en in de hyperbel $\mathrm{PF} = \mp x \pm c$; by gevolg (om dat de △ FPM rechthoekig is en FM = PL), $\overline{\mathrm{PM}}^2 = \overline{\mathrm{FM}}^2 - \overline{\mathrm{FP}}^2$, of $y^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} \mp \frac{2c^2x}{a} \mp \frac{2cx^2}{a} + 4cx = \frac{c^2x^2 \mp 2ac^2x \mp 2acx^2 + 4a^2cx}{a^2}$; waar uit deeze nieuwe vergelyking voortkoomt $y^2 = \frac{(2ax \mp x^2)(2ac \mp c^2)}{a^2}$, en maakende de bekende rechthoek $2ac - c^2 = b^2$, heeft men $y^2 = \frac{(2ax \mp x^2)\, b^2}{a^2}$.

D. T. B. W. ten 1e.

Wan-

Wanneer in de eerste vergelyking $y^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} \mp \frac{2c^2x}{a} \mp \frac{2cx^2}{a} + 4cx$, de grootheid a oneindig groot gesteld word, zullen alle de termen op een naa verdwynen, blyvende $y^2 = 4cx$; by gevolg is de vergelyking des parabels $y^2 = 4cx$, of $y^2 = 2px$ stellende $4c = 2p$ (*).

D. T. D. W. ten 2e.

I. GEVOLG.

§. 177. Hier uit volgt dat men in de elips en in de hyperbel altoos deeze eevenreedigheid heeft $y^2 : 2ax \mp x^2 = b^2 : a^2$, voortkoomende uit de vergelyking

y^2

(*) De parabels parameeter die wy tot hier toe $= p$ gesteld hebben, zal in 't vervolg door $2p$ aangeweezen worden, om de oovereenkomst van deeze kromme lyn met de twee andere te bewaaren, in welke p voor de halven parameeter van den as Aa genoomen was; en dus zal de vergelyking $y^2 = px$ in $y^2 = 2px$ en $px + \frac{1}{4}p^2$ in $2px + p^2$ veranderen.

$y^2 = \frac{(2ax \mp x^2)b^2}{a^2}$; dus zullen de vierkanten der ordinaaten tot elkander in dezelvde *Reeden* zyn als de producten haarer absciſſen; want $AP \times aP = 2ax \mp x^2$; daar by is de *Reeden* van b^2 tot a^2, die de betrekking aanwyſt die 'er tuſſchen het vierkant van een ordinaat, en den rechthoek $aP \times AP$ haarer absciſſen is, eene beſtendige *Reeden*. In de parabel zyn de vierkanten der ordinaaten tot elkander als haare absciſſen; hetwelke een noodzaakelyk gevolg is van de vergelyking $y^2 = 2px$.

II. GEVOLG.

§. 178. Wy hebben in de voorgaande Hoofdeelen (§. 57 en 116.) gezien dat een derde eevenreedige aan twee halve aſſen, de halven parameeter is van dien as welke de eerſte plaats in de eevenreedigheid bekleed. Noemende dan p die van den eerſten halven as, heeft men $a : b = b : p$, of wel $b^2 : a^2 = p : a$; en ſtellende dit in plaats in de eerſte eeven-

eevenreedigheid $y^2 : 2ax \mp x^2 = b^2 : a^2$, verandert dezelven in $y^2 : 2ax \mp x^2 = p : a$. En dus $y^2 = 2px \mp \frac{px^2}{a}$. De breuk $\frac{px}{a}$ geeft deeze eevenreedigheid $a : p = x : \frac{px}{a}$; by gevolg is den rechthoek ap door de twee eerste termen van de eevenreedigheid gemaakt, gelykvormig aan den rechthoek $\frac{px^2}{a}$ die door de twee laatste gemaakt is; wyl de gelykstandige zyden eevenreedig zyn. By gevolg *is in een jegelyke Keegel-sneede, het vierkant van eene ordinaat aan de eersten as in vergelyk van het product* 2px *baarer abscisse door den geheelen parameeter, gelyk in de parabel, kleinder in de elips, en grooter in de hyperbel; daar by, is in beiden de laatsten het meerder of minder* (defaut ou excès), (*door* $\frac{px^2}{a}$ *aangeweezen, wiens zyden* x *en* $\frac{px}{a}$ *zyn*) *altoos een gelykvormigen rechthoek aan dien* ap, *welke gemaakt word door de helften van den eersten as en zyn parameeter.* Het is om deeze eigenschappen dat de Ouden aan

de drie Keegel-sneeden de naam van *Parabel*, *Elips* en *Hyperbel* gegeeven hebben; welke naamen *gelykheid*, *minder* en *meerder* aanduiden.

Het geene hier weegens de assen gezegt is, heeft ook plaats weegens de diameeters; wyl deezen dezelvde vergelykingen hebben als de assen. (gelyk gezien kan worden §§. 40, 96, en 152).

III. GEVOLG.

§. 179. Zoo men $x = c$, of $= 2a \mp c$ steld, is $y^2 : 2ac \mp c^2 = b^2 : a^2$; maar $2ac \mp c^2 = b^2$; dus $y^2 : b^2 = b^2 : a^2$, waar uit $y = \frac{b^2}{a} = p$ voortkoomt. By gevolg *is het dubbeld van de ordinaat die door het brandpunt gaat, in alle de Keegel-sneeden, gelyk aan den parameeter van den eersten as*; eeven als men voor ieder in 't byzonder gezien heeft (in de §§. 26, 61, en 120).

Zoo $x = \mp a$ gesteld word, heeft men $y^2 : \pm a^2 = b^2 : a^2$, en dus $y^2 = \pm b^2$; waar uit volgt, dat het vierkant van de

or-

ordinaat CB die door het middelpunt gaat, gelyk is aan het vierkant $\pm b^2$. Dit vierkant is stellig (*positif*) in de elips en geeft twee waare waardyen voor y in die kromme lyn; in teegendeel is dat vierkant ontkennend (*negatif*) in de hyperbel en geeft twee inbeeldige waardyen $\mp\sqrt{-b^2}$ voor y; om dat die kromme lynen *m*AM en *ma*M (*Fig.* 25.) geen waare ordinaaten hebben kunnen op de abscissen die tusschen de twee uiterstens A en *a* op den eersten as genoomen worden.

IV. GEVOLG.

§. 180. Wanneer de beiden assen in de elips en in de hyperbel gelyk aan elkander gesteld worden; (welk in 't eerste geval een cirkel geeft, en in het tweede eene gelykzydigen hyperbel), zal de parameeter ook gelyk zyn aan een dier assen, en de vergelyking $y^2 = 2px \mp \frac{px^2}{a}$ in $y^2 = 2px \mp x^2$ veranderen, welke een cirkels of gelykzydigen hyperbels

vergelyking is; in de veronderſtelling (die ook hier gedaan word) dat de ordinaaten rechthoekig op den as ſtaan.

V. GEVOLG.

§. 181. Indien men in de vergelyking $y^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} \mp \frac{2c^2x}{a} \mp \frac{2cx^2}{a} + 4cx$, $x = c$ ſteld, zal dezelve veranderen in $y^2 = \frac{c^4}{a^2} \mp \frac{4c^3}{a} + 4c^2$; trekkende de vierkants wortel is $y = \frac{c^2}{a} \mp 2c$; maar men heeft (§. 179.) gezien, dat de dubbelde ordinaat die door het brandpunt F gaat (zoo als in dit geval gebeurt) gelyk is aan den parameeter, by gevolg is de algemeene uitdrukking van den parameeter aan den eerſten as van een iegelyke Keegel-ſneede, deeze $2p = \frac{2c^2}{a} \mp 4c$.

Doordien in de parabel $a = \infty$ is, zal de waardy van de parameeter $2p = 4c$ zyn.

AAN-

AANMERKINGE.

§. 182. Alzoo wy in de voorgaande Hoofdeelen hebben doen zien, dat de eigenschappen der meede-diameeters eeven dezelvde zyn als die der assen, (§§. 40, 96 en 152.) zullen wy ons hier niet ophouden, met de Betooging dat hunne Vergelykingen eeven dezelvde zyn, wanneer de oorspronken haarer abscissen ook aan een der uiterstens dier diameeters gesteld word.

VI. VRAAGSTUK.

§. 183. *De raaklyn* MT (Fig. 15 en 21.) *aan eenig punt* M *van een Keegel-sneede gegeeven zynde; word gevraagt de waardy der onder-raaklyn* PT *te bepaalen; stellende den oorspronk der abscissen aan de kruin* A.

OPLOSSING.

Wy hebben in de voorgaande Hoofddeelen (§§. 76 en 135.) gezien, dat men

voor de elips en voor de hyperbel deeze eevenreedigheid heeft CP: CA = CA: CT, of (ſtellende de analytiſche waardyen) $a \mp x : a = a : \frac{a^2}{a \mp x} = CT$; zoo men dan in de elips CP van CT aftrekt, en in de hyperbel CT van CP, is $PT = \frac{2ax \mp x^2}{a \mp x}$.

D. T. D. W.

I. GEVOLG.

§. 184. Wanneer de analytiſche waardyen der lynen PM en PT bekend zyn, is het gemakkelyk die der onder-loodlyne PR, en der loodlyne MR te vinden; beneevens die der raaklyn MT, en der lynen AR, *a*R, AT en *a*T. Door de rechthoekigen $\triangle^n$ TMP, MRP, en RMT is (als voorheen) $RP = \frac{b^2}{a^2}(a \mp x)$, of gebruik maakende van den parameter p, is $RP = \frac{p}{a}(a \mp x) = p \mp \frac{px}{a}$, by gevolg is in de Keegel-ſneeden, de *onder-loodlyne* PR *in vergelyk van den hal-*

ven

den parameter van den grooten of eersten as, kleinder in de elips, grooter in de hyperbel, en gelyk in de parabel. (Om dat in deeze laatste kromme lyn $a = \infty$, en dus ook $\mp \frac{px}{a} = \mp 0$). Op dezelvde wyze is MR $= \sqrt{\frac{a^2b^4 \mp 2ab^4x + b^4x^2 + 2a^3b^2x \mp a^2b^2x^2}{a^2}}$, en zoo men in dezelve den halven parameeter steld, is MR $=$ . . . . . $\sqrt{\frac{a^2p^2 \mp 2ap^2x + p^2x^2 + 2a^2px \mp apx^2}{a}}$; waar door MR $= \sqrt{2px+p^2}$ word voor de parabel, stellende $a = \infty$.

De rechthoekige $\triangle$ MPT geeft MT $= \sqrt{\overline{MP}^2 + \overline{PT}^2} = \sqrt{(2ax \mp x^2)\frac{b^2}{a^2} + \frac{(2ax \mp x^2)^2}{(a \mp x)^2}}$.

Wanneer 'er tot PR $= \frac{b^2}{a^2}(a \mp x)$ de lyn AP $= x$ geteld word, is AR $= \frac{b^2a \mp b^2x \mp a^2x}{a^2}$, en gebruik maakende van den halven parameeter p, heeft men AR $= p + x \mp \frac{px}{a}$; by gevolg is AR *in vergelyk*

 van

van de som van den halven parameeter van den eersten as en van de abscisse x; *kleinder in de elips, grooter in de hyperbel, en gelyk in de parabel*, om dat in dit laatste geval $\mp\frac{px}{a}=0$ is. Op dezelvde wyze is $aR = \frac{2a^3 \mp a^2x \mp qb^2 + b^2x}{a^2}$ of $2a \mp x \mp p + \frac{px}{a}$, welke eene oneindige grootheid voor de parabel geeft.

Eindelyk indien van $PT = \frac{2ax \mp x^2}{a \mp x}$ de lyn $AP = x$ afgenoomen word, is $AT = \frac{ax}{a \mp x}$; het welke $AT = x$ voor de parabel geeft. Daar by is het baarblykelyk dat deeze AT oneindig word voor de elips, wanneer $x = a$ is; en dat $AT = a$ word in de hyperbel wanneer $x = \infty$ is. Op dezelve wyze vind men $aT = \left(\frac{2a \mp x}{a \mp x}\right)a$; welke lyn meede oneindig is in de parabel.

II. GEVOLG.

§. 185. Indien men van de lyn $PT = \frac{2ax \mp x^2}{a \mp x}$, de lyn FP aftrekt, wanneer het punt P tusschen de punten C en F valt in de elips; of dat men FP tot die zelvde lyn voegt, wanneer het punt P tusschen de kruin A en het brandpunt F valt, heeft men $FT = \frac{ax + ac \mp cx}{a \mp x}$; op de zelvde wyze, wanneer $PT = \frac{2ax - x^2}{a - x}$ tot $fP = 2a - x - c$ (*Fig.* 15.) gevoegt, of $PT = \frac{2ax + x^2}{a + x}$ van $fP = 2a + x + c$ (*Fig.* 21.) afgetrokken word, blyft 'er $fT = \frac{2a^2 \mp ax \mp ac + cx}{a \mp x}$, maar (volgens §. 176.) FM is $= \frac{ac + ax \mp cx}{a}$, en by gevolg $fM = \frac{2a^2 \mp ac \mp ax + cx}{a}$; dus $FM : FT = \frac{ac + ax \mp cx}{a} : \frac{ac + ax \mp cx}{a \mp x} = \frac{1}{a} : \frac{1}{a \mp x} = a \mp x : a = CP : CA$. By gevolg ook fM:

$fT = \frac{2a^2 \mp ac \mp ax + cx}{a} : \frac{2a^2 \mp ac \mp ax + cx}{a \mp x}$

$= a \mp x : a =$ CP : CA.

III. GEVOLG.

§. 186. Uit deeze twee gevonde eevenreedigheeden haald men een nieuwe algemeene wyze om door eenig gegeeve punt M aan een der Keegel-ſneeden, een raaklyn te trekken, door middel van een der brandpunten. Ten dien einde maakt men deeze eevenreedigheid, CP : CA = FM : FT of $= fM : fT$ (waar van de drie eerſte termen bekend zyn). Het punt T dus gevonden zynde, trekt men door dezelve en het gegeeve punt M een lyn MT, die de gevraagde raaklyn weezen zal. Zoo men den halven as AC $= \infty$ ſteld, worden de twee termen $a \mp x$ en a gelyk aan elkander, en by gevolg ook de termen FM en MT; gelyk reeds gebleeken is in de parabel.

I. GROND-

I. GRONDLES.

§. 187. *Wanneer men uit de brandpunten* F *en* f (Fig. 15 en 21.) *twee loodrechten* FE *en* fe *op een raaklyn* MT *laat vallen, is* FE × fe $= \overline{CB}^2$.

BETOOGINGE.

De $\triangle^n$ MTP, FET en feT zyn $\backsim$, en dus MT : MP = FT : FE = fT : fe; bygevolg FE $= \frac{MP}{MT} \times FT$, en fe $= \frac{MP}{MT} \times fT$; waar uit voortkoomt $FE \times fe = \frac{\overline{MP}^2}{\overline{MT}^2} (\pm \overline{CT}^2 \mp \overline{CF}^2)$, want FT is $= \pm CT \mp CF$ en $fT = CT + CF$; daar by is reeds gevonden (§. 184.) dat $\overline{MT}^2 = (2ax \mp x^2)\frac{b^2}{a^2} + \frac{(2ax \mp x^2)^2}{(a \mp x)^2}$ en in alle de gevallen, is $\overline{MP}^2 = (2ax \mp x^2)\frac{b^2}{a^2}$; dus heeft men . . . .

$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{MT}^2} = \frac{b^2((a \mp x)^2)}{a^2b^2 \mp 2ab^2x + b^2x^2 + 2a^3x \mp a^2x^2}$ ver-

mee-

meenigvuldigende deeze laatste waardy door $\mp\overline{CT}^2 \mp \overline{CF}^2 = \frac{\mp a^4}{(a\mp x)^2} \mp c^2$, of door $\frac{a^2b^2 \mp 2ab^2x + b^2x^2 + 2a^3x \mp a^2x^2}{(a\mp x)^2}$ (stellende de $a^2 \mp b^2$ voor c^2 en brengende alles tot de zelvde noemer) zal men vinden, dat $FE \times fe = b^2 = \overline{CB}^2$ is.

D. T. B. W.

Uit deeze Grondles worden de volgende afgeleid, die van groot gebruik zyn.

Grondles.

I. *Het product* aP $\times$ AP (Fig. 15 *en* 21.) *der abscissen van den grooten as, is gelyk aan het product* CP $\times$ PT *der stukken van dien verlengden as, geleegen tusschen het middelpunt* C *en het punt* T *daar dien verlengden as de raaklyn* MT *ontmoet; dat is te zeggen,* aP $\times$ AP *is* = *aan* CP $\times$ PT.

BETOOGINGE.

Voor de Elips. (*Fig. 15.*)

Ten 1e is CT: CA = CA: CP (§. 76.) bygevolg CT—CA: CA—CP = CA: CP (*k*) of AT: AP = CA of C*a*: CP; dus AT+AP: AP = C*a*+CP: CP (*l*); of PT: AP = *a*P: CP; en by gevolg AP×*a*P = PT×CP.

D. T. B. W. ten 1e

Voor de Hyperbel. (*Fig. 21.*)

Ten 2e CT: C*a* = C*a*: CP (§. 135.), dus CT+C*a*: C*a*+CP = C*a*: CP, of *a*T: *a*P = C*a*: CP; by gevolg *a*P—*a*T: *a*P = CP—C*a*: CP, of TP: *a*P = AP: CP; en dus *a*P×AP = CP×PT.

D. T. B. W. ten 2e

GRONDLES.

II. *Zoo men uit het middelpunt* C (Fig. 57 en 58,) *een lyn* CK *trekt, eevenwydig aan de loodlyne* MR; *is* CK × MR = $\overline{BC}^2$.

BE-

(*k*) Eucl. XVI en XVII, 5. (*l*) Eucl. XVIII. 5.

BETOOGINGE.

Voor de Elips en voor de Hyperbel.

Trekt de ordinaat PM dan is $CT \times CP = \overline{CA}^2$, om dat CT : CA = CA : CP (§§. 76 en 185.) en $PT \times CP = aP \times AP$ door de voorgaande Grondles; daar by is $\overline{CA}^2 : AP \times aP = \overline{CB}^2 : \overline{PM}^2$ (§§. 59 en 118.); stellende dan voor $\overline{CA}^2$ en $AP \times aP$ hunne waardyen heeft men $CT \times CP : PT \times CP = \overline{CB}^2 : \overline{PM}^2$, en deelende de eerste reeden door CP is $CT : PT = \overline{CB}^2 : \overline{PM}^2$; nu zyn de △s CtT en PTM ∽ (v); dus CT : PT = Ct : PM; by gevolg $\overline{CB}^2 : \overline{PM}^2 = Ct : PM$, en dus $\overline{CB}^2 \times PM = \overline{PM}^2 \times Ct$; of $\overline{CB}^2 = Ct \times PM$. De △s RPM en CtK ∽ zynde, om dat zy gemaakt zyn door de evenwydige lynen Ct en PM; MR en CK (d), zoo is PM : MR = CK : Ct, en dus $PM \times Ct = MR \times CK$; maar daar is zoo eeven beweezen dat $\overline{CB}^2 = Ct \times PM$ is, by gevolg ook $\overline{CB}^2 = MR \times CK$.

D. T. B. W.

GEVOLG.

III. Het vierkant $\overline{BC}^2$ op den halven tweeden as CB is gelyk aan het product der ordinaat PM door

(v) Eucl. II. 6. (d) Eucl. XXIX. 1.

door het deel Ct van den verlengden tweeden as, geleegen tusschen het middelpunt C en de ontmoeting t van de raaklyn TMt die door het punt M gaat; dat is $\overline{BC}^2 = PM \times Ct$.

GRONDLES.

IV. *Wanneer 'er op de uiterstens* A *en* a (Fig. 57 en 58.) *van den grooten as, twee loodrechte lynen* A E *en* a G *opgericht, en dezelve verlengt zyn tot aan de raaklyn* T M G; *is het product* A E × a G *van deeze loodrechte lynen* AE *en* a G, *gelyk aan het vierkant* $\overline{CB}^2$ *van de helft der tweeden as* CB; *dat is*, $\overline{CB}^2 = AE \times aG$.

BETOOGINGE.

Voor de Elips en voor de Hyperbel.

Dewyl CP : CA = CA : CT, zoo is CA − CP : Ca of CA = CT − CA : CT voor den elips, en CP − CA : Ca of CA = CA − CT : CT voor de hyperbel; dus heeft men in beide AP : CA = AT : CT; by gevolg AT : CT = AT + AP : CT + Ca (e) of wel AT : CT = TP : Ta; dus weederom AT : TP = CT : Ta (f). De △ TAE is ∽ △TPM (g)

(*e*) Eucl. XVI. en XVIII. 5. (*f*) Eucl XVI. 5.
(*g*) Eucl. II. 6.

BETO...

... en TaG; dus TA: ... $Ta = Ct$: aG; by ge- ... aG (k), en $AE \times aG =$

Voor de Eli... Ct is $= \overline{CB}^2$ door het voor- ... us ook $\overline{CB}^2 = AE \times aG$.

Trekt de pr... om dat CT ... PT×CP=

D. T. B. W.

les; dus ... olgende Vraagstuk is getrokken uit de (§§. ... de *Mr. l'Abbé de la Caille*. (Pag. 87. ×...) en om deszelfs groote nuttigheid in de ... unde, hier geplaatst; dien Heer doet het ... dienen ter bepaalinge van de waare *Anoma-* ... Verders is ter betooging van dit Vraagstuk ... odig de volgende Grondles, (te vinden in dat ... elvde Boek Pag. 25. §. 127.) *In een iegelyken driehoek is het product van de twee zyden die een gevraagden hoek bevatten, tot het product van de twee verschillen, die men verkrygt wanneer de halve som der drie zyden van ieder deezer twee zyden afgetoogen word: gelyk het vierkant van de straal tot het vierkant van de* Sinus *of Hoekmaat van de helft der gezochten hoek.*

VRAAGSTUK.

VI. *Gegeeven zynde de grooten as* Aa (Fig. 14.) *en de beide brandpunten* F *en* f, *beneevens den hoek* MFa

(k) Eucl. XI. 5.

welke de *Voerstraal* FM met dien as maakt; gevraagd de *analytische waardy* van MF te

OPLOSSING.

Trekt de lyn Mf; dan is $\frac{1}{2}$ FM + $\frac{1}{2}$ fM + $\frac{1}{2}$ fF $=$ fA $=$ Fa; maar fF$\times$FM of 2 CF$\times$FM: (Fa--Ff) (Fa--FM) of FA(Fa--FM) $=$ 1 : *Sin*^{2}. $\frac{1}{2}$ $\forall a$FM, door de voorgaande Grondles N°. V. By gevolg is FM $\times$ Ff $\times$ *Sin*^{2}. $\frac{1}{2}$ $\forall a$FM $=$ FA $\times$ Fa--FA $\times$ FM, of FM$\times$F$f\times$*Sin*^{2}. $\frac{1}{2}$ $\forall a$FM+FA$\times$FM $=$ FA $\times$ Fa; of wel FM (FA+F$f\times$*Sin*^{2}. $\frac{1}{2}\forall a$FM) $=$ FA$\times$Fa; by gevolg is, Ten 1e FM $=$

$$\frac{FA\times Fa}{FA+Ff\times Sin.^2 \frac{1}{2} \forall a FM}.$$

La Caille Astr. Pag. 10. *Form.* 8. Maar de Straal --- *Cos.* $\forall a$FM $=$ 2 *Sin.*^{2} $\frac{1}{2}$ $\forall a$FM. of 1 --- *Cos.* $\forall a$FM $=$ 2 *Sin.*^{2} $\frac{1}{2}$ $\forall a$FM.

Stellende deeze waardy in de noemer van FM, is Ff of 2 CF $\times$ *Sin.*^{2} $\frac{1}{2}$ $\forall a$FM $=$ CF.--CF *Cos.* $\forall a$FM; by gevolg is ten 2e FM $=$ $\frac{FA\times Fa}{FA+CF--CF\times Cos.\forall aFM}$,

of wel FM $=$ $\frac{FA\times Fa}{CA--Cos.\forall a FM\times CF}$.

Laat AC $=$ a zyn en FA $=$ b, dan is FC $=$ a--b $=$ c; Fa $=$ a+c $=$ 2a---b, en fa $=$ CA of Ca--- FC of Fc $=$ a---a+b $=$ b of---b; dus is Ff

 $=$

$=2a-b$; stellende deeze waardyen, heeft men

Ten 3e. FM = ...

$$\frac{b(a+c)}{b+2c\,(Sin^2.\frac{1}{2}\,V\,aFM)}=\frac{b(2a-b)}{b+2(a-b)(Sin^2\frac{1}{2}VaFM)}$$

Ten 4e. FM = ...

$$\frac{2ab-b^2}{b+(a-b)(Cos.\,VaFM.)}=\frac{2ab-b^2}{a-c\times Cos.\,V\,aFM}$$

D. T. D. W.

GEVOLG.

VII. $\overline{CB}^2$ is $=\overline{BF}^2-\overline{FC}^2=\overline{CA}^2-\overline{FC}^2=a^2-(a-b)^2$; by gevolg is $\overline{CB}^2=a^2-a^2+2ab-b^2=2ab-b^2$; maar $\overline{CB}^2$ is $=b^2=ap$ §. 57. (stellende $p=$ aan de parameeter van den halven as AC); dus is $ap=2ab-b^2$ of $b^2=2ab-ap$, en by gevolg $a=\frac{b^2}{2b-p}$; stellende dan deeze waardy van a in de tweede gelykheid van FM, is

$$\text{Ten 3e. FM}=\frac{\frac{2b^3}{2b-p}-b^2}{\frac{b^3}{2b-p}-\left(\frac{b^2}{2b-p}-b\right)Cos.\,VaFM}$$

of $FM=\frac{pb}{b-(p-b)\,Cos\,V\,aFM}$, wanneer de gegeeven hoek aFM eene scharpen hoek is, en $FM=\frac{pb}{b+(p-b)\,Cos\,V\,aFM}$ als den hoek a FM eene plompen hoek is, om dat de

Co-

Cosinus van eenen stompen hoek *negatief* is: Zoo 'er dan, van deeze zes dingen; naamentlyk, *de Voerstraal* FM, *den parameeter*, *den afstand* FA *van een brandpunt tot de kruin*; *den hoek* aFM *die de voerstraal* FM *met den as* Aa *maakt*, *den grooten as* Aa, *en den afstand van het brandpunt tot het middelpunt*, drie gegeeven zyn, zal men gemakkelyk de drie andere kunnen bepaalen.

VOORBEWYS.

§. 188. *Wanneer 'er twee veranderlyke grootheeden* a *en* b *gegeeven zyn*, *zoodaanig dat zoo meenigmaal den eersten* $a+c$ *word*, *de tweeden op dat zelvde oogenblik in* $b+c$ *verandert* (c *de aangroeijinge zynde der veranderlyken* a en b): *dan zegge ik*, *dat* $\frac{a}{b} : \frac{a+c}{b+c} \lessgtr a : a+c$ *zal zyn.*

BETOOGINGE.

Het is bekend, dat, wanneer men twee *Reedens* met elkander vergelykt, is de eerste tot de tweede gelyk het *product* der uitersten tot het *product* der mid-

delstens, wanneer de leeden opgaande zyn; waar uit blykt dat 'er dan alleen betoogt moet worden, dat het *product* der uiterstens kleinder is als dat der middelstens in het eerste geval, en grooter in het tweede; het welke klaarblykelyk is, dewyl de gebrooken $\frac{da+ac}{b}$ en $\frac{aa+ac}{b\mp c}$ de zelvde tellers hebben, en dus tot elkander zyn in weederkeerige *Reeden* hunner noemers b en $b\mp c$, dat is te zeggen gelyk $b\mp c : b$.

D. T. B. W.

II. GRONDLES.

§. 189. *Indien men uit een brandpunt* F (Fig. 15 en 21.) *verscheide lynen* FM, *en* Fm *trekt tot verschillende punten* M, *en* m *op de Keegel-sneeden*, (*welke* FM, Fm *enz.* *Voerstraalen zyn* §. 32.) *en uit dat zelvde punt* F *eeven zoo veel lynen* FE *en* Fe, *ieder in 't byzonder loodrecht op de raaklynen door de punten* M *en* m *getoogen; dan zullen de vierkants wortels deezer Voer-*

straa-

ſtraalen minder aangroejen in de elips als de vierkants-wortels der loodrechten FE *en* Fϵ*, ieder aan ieder; maar in teegendeel zullen de vierkants-wortels van de Voerſtraalen in de hyperbel meer aangroejen in vergelyk van elkander als de vierkants-wortels van haare overeenſtemmende loodrechten* FE *en* Fϵ*; en zy zullen in de parabel gelykkelyk aangroejen.*

BETOOGINGE.

De Δ^n FME, en fMe, $\backsim$ zynde, is FM: FE $=$ fM: fe; dus FE $=$ $\frac{FM \times fe}{fM}$, en by gevolg $\overline{FE}^2 = fe \times FE \times \frac{FM}{fM} = \overline{BC}^2 \times \frac{FM}{fM}$ (§. 187). Laat Fm ook een Voerſtraal van het punt m zyn, en laat door dat zelvde punt m een raaklyn getoogen worden, als meede Fϵ $\perp$ op $m\epsilon$; zoo zal (gelyk zoo eeven betoogt is voor FE) $\overline{F\epsilon}^2 = BC^2 \times \frac{Fm}{fm}$ zyn; dus $\overline{FE}^2 : \overline{F\epsilon}^2 = \overline{BC}^2 \times \frac{FM}{fm} : \overline{BC}^2 \times \frac{Fm}{fm} = \frac{FM}{fM} : \frac{Fm}{fm}$; maar, wanneer in de elips de lyn FM groeid, neemt fM af; en die lynen FM

 en

en fM groejen gezamentlyk in de hyperbel; dus heeft men door het *Voorbewys* $\frac{FM}{fM} : \frac{Fm}{fm} \lessgtr FM : Fm$; by gevolg ook $\overline{FE}^2 : \overline{Fe}^2 \lessgtr FM : Fm$; en neemende byderzyds de wortels, is $FE : Fe \lessgtr \sqrt{FM} : \sqrt{Fm}$; dat is te zeggen, dat de eerste *Reeden* kleinder is als de tweeden in de elips, en grooter in de hyperbel; by gevolg bevat $\sqrt{FM}$ meerder maalen $\sqrt{Fm}$ als FE, Fe bevat; by gevolg is $\sqrt{Fm}$ minder in vergelyk van $\sqrt{FM}$ (in de elips) als Fe is in vergelyk van FE; en omgekeerd in de hyperbel.

D. T. B. W. ten 1e en 2e

In de parabel (*Fig.* 8.) is deeze *Reeden*, een *Reeden* van gelykheid; want $FA : FE = FE : FT$ of FM; dus $FA \times FM = \overline{FE}^2$. Zoo men nu een andere Fm steld, met zyn overeenstemmende Fe, heeft men $\overline{Fe}^2 = FA \times Fm$; dus $\overline{FE}^2 : \overline{Fe}^2 = FA \times FM : FA \times Fm = FM : Fm$; en neemende byderzyds de wortels, $FE : Fe = \sqrt{FM} : \sqrt{Fm}$.

D. T. B. W. ten 3e.

BE-

BEPAALINGE.

§. 190. Indien 'er een Cirkel getoogen word door drie punten welke oneindig digt by elkander op den omtrek van een der Keegel-sneeden genoomen zyn; zal deeze de *Kromte Cirkel* (*Cercle Osculateur*) genaamd worden; en de straal derzelver de *Ontrolde straal* of *de Kromte straal*; om dat de kromte of bogt van dien cirkel en die van de Keegel-sneeden tusschen die drie genoomen punten, eeven dezelvde is.

VII. VRAAGSTUK.

§. 191. *Word gevraagd de Kromte straal voor alle drie de Keegel-sneeden, te bepaalen* (Fig. 26 en 27).

OPLOSSING.

Voor de Elips en voor de Hyperbol.

Laaten 'er twee meede-diameeters CM

en CL zyn; zy uit het uiterſten M van den eerſten, eene loodlyne MRK op den tweeden getoogen, en eene lyn NO*n* eevenwydig aan de raaklyn van het ſtip M, zoodaanig dat die lyn NO*n* oneindig digt by het zelve zy, gefneeden wordende in het punt *n* door de loodlyne MR, en zy dezelve in twee gelyk gedeeld in het ſtip O; laat eindelyk door dat ſtip O een lyn *m*O getoogen zyn, loodrecht op N*n*, ontmoetende de kromme lyn in het punt *m*; en het middelpunt van de *Kromte cirkel* zal op deeze lyn zyn (*). Steld den onbekenden diameeter van die cirkel $= 2z$, $t =$ aan de abſciſſe *m*O, en $u =$ aan de abſciſſe MO, beide op den diameeter CM genoomen. Door dien 'er door de punten N, *m* en *n*, een cirkel moet gaan, is $\overline{NO}^2 = (2z - t)t$, (†); en dewyl die zelvde ſtippen ook aan de elips of aan de hyperbel zyn, heeft men nog $\overline{NO}^2 = (2CM \mp u)u \times \frac{\overline{CL}^2}{\overline{CM}^2}$; dus $(2z - t)t = (2CM \mp u)$

(*) Eucl. [illegible] III. 3 (†) Eucl. XIII. 6.

$\mp u) \, u \times \frac{\overline{CL}^2}{\overline{CM}^2}$; wanneer het punt *m* op M valt, zal $mO = M\pi$ zyn, en de *Reeden* van *m*O tot MO, dat is de *Reeden* van *t* tot *u* de zelvde zynde als die van M*π* tot MO of van MK tot MC, (om dat de △s. M*πo* en MKC ∽ zyn) zoo is MK: $CM = t : u = \frac{t \times CM}{MK}$; ſtellende dan deeze waardy van *u* in de booven gevonde vergelyking, en deelende de beide leeden door *t*, heeft men $2z - t = \ldots$ $\left(2CM \mp \frac{CM \times t}{MK}\right)\left(\frac{CM}{MK} \times \frac{\overline{CL}^2}{\overline{CM}^2}\right)$; maar *t* oneindig klein zynde in vergelyk van *z*, of $t = 0$; zoo word $\mp \frac{CM \times t}{MK}$ ook $= 0$; by gevolg verandert die vergelyking in deeze $2z = 2CM \times \frac{CM}{MK} \times \frac{\overline{CL}^2}{\overline{CM}^2}$; dus $2z = \frac{2\overline{CL}^2}{MK}$, en $z = \frac{\overline{CL}^2}{MK}$.

D. T. D. W. ten 1e en 2e

Voor de Parabel (*Fig.* 58).

192. Houdende altoos de zelvde benaamingen als in de voorgaande betooginge, zy gesteld dat π den parameeter is van den diameeter MQ die door het punt M gaat; dan heeft men weeder voor de *Kromte cirkel* $(2z-t)t = \overline{ON}^2$, (*); en door de parabel is $\pi u = \overline{NO}^2$ (§. 23.) by gevolg $(2z-t)t = \pi u$; wanneer het stip *m* oneindig digt by het punt M is, zal de *Reeden* van *m*O tot MO dezelvde zyn als die van PR tot MR; dus MR: PR $= u : t$; by gevolg $u = \frac{MR \times t}{PR}$, stellende deeze waardy van *u* in de voorgaande vergelyking en deelende door *t*, heeft men $2z - t$, of (om dat *t* oneindig klein is in vergelyk van z), $2z = \frac{\pi \times MR}{PR}$.

D. T. D. W. ten 3e.

§. 193.

(*) Eucl. XIII, 6.

§. 193. Om de analytische waardy van de *Kromte straal* te verkrygen, moet 'er voor eerst aangemerkt worden, dat de gelykheid $CL \times MK = ab$ (gevonden §§. 108 en 158.) deeze geeft, $MK = \frac{ab}{CL}$; by gevolg z of $\frac{\overline{CL}^2}{MK} = \frac{\overline{CL}^3}{ab}$. Daar by heeft men (§. 103.) beweezen dat $\overline{CM}^2 + \overline{CL}^2 = a^2 + b^2$; en op de zelvde wyze kan 'er in de hyperbel betoogt worden, dat het verschil $\overline{CM}^2 - \overline{CL}^2$ der vierkanten op twee halve meedediameeters, gelyk is aan het verschil van de vierkanten der halven assen; dus heeft men altoos $\overline{CM}^2 \pm \overline{CL}^2 = a^2 \pm b^2$. By gevolg is $\overline{CL}^2 = \pm a^2 + b^2 \mp \overline{CM}^2$; maar de rechthoekigen $\triangle CPM$, geeft $\overline{CM}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PM}^2$ of $a^2 \mp 2ax + x^2 + (2ax \mp x^2)\frac{b^2}{a^2}$; waar uit gemakkelyk gehaald word

$$CL = \frac{\sqrt{a^2b^2 + 2a^3x \mp a^2x^2 \mp 2ab^2x + b^2x^2}}{a},$$

by gevolg z of $\frac{\overline{CL}^3}{ab} = \ldots\ldots\ldots$

V

$\frac{\sqrt{a^2b^2+2a^3x\mp a^2x^2\mp 2ab^2x+b^2x^2}^3}{a^3\times ab}$ en stellende ap voor b^2, heeft men $z=$ $\frac{\sqrt{a^3p+2a^3x\mp a^2x^2\mp 2a^2px+apx^2}^3}{a^3\times a\sqrt{ap}}$, welke = aan p word, in alle de Keegel-sneeden, wanneer $x=0$ is; waar uit voortvloeid, dat in ieder van dezelve, *de Kromte straal, aan de kruin van de kromme lyn genoomen, gelyk is aan den halven parameeter van den as.*

Indien den oorspronk der absciffen in het middel-punt C genoomen word, is CL $=\frac{\sqrt{\pm a^4\mp a^2x^2+apx^2}}{a}$; by gevolg $\frac{\overline{CL}^3}{ab}$ of $\frac{\overline{CL}^3}{a\sqrt{ap}}$ of $z=\frac{\sqrt{\pm a^4\mp a^2x^2+apx^2}^3}{a^3\times a\sqrt{ap}}$. Wanneer deeze waardy vergeleeken word met $\frac{\sqrt{\pm a^3p\mp apx^2+p^2x^2}^3}{a^3\times p^2}$ (die den teerling der loodlyne MR is, gedeelt door het vierkant der halve parameeter p van den as); vind men dra dat zy aan elkander gelyk zyn; by gevolg is in ieder der Keegelsneeden $z=\frac{\overline{MR}^3}{p^2}$; dat is te zeg-

gen, de *Kromte ſtraal* van een iegelyk punt, in alle de Keegelſneeden, is gelyk aan den teerling van de loodlyne, gedeelt door het vierkant der halven parameeter van den voornaamen as; waar uit volgt, dat de waardy der *Kromte ſtraal* in de parabel, deeze is $z = \frac{(\frac{1}{4}p + px) \times \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + px}}{\frac{1}{4}p^2}$, wanneer de geheele parameeter = aan p geſteld word.

AANMERKINGE.

I. Uit het Voorgezegde blykt, dat de *Kromte ſtraal* loodrecht op de kromme lyn ſtaat, of loodrecht op de raaklyn, en dus is deeze ſtraal in de zelvde ſtreek als de loodlyne.

II. Deeze *Kromte ſtraal* en behoord tot de gemeene Meetkunſt niet, zy is eigentlyk het onderwerp van de verheeve Wiskunde. Verſcheide Meetkunſtenaaren hebben dezelve bepaald zonder de *Fluxie Reekening*, doch zy hebben het eevenwel niet kunnen doen, zonder in hunne betoogingen de oneindige kleinen te gebruiken, gelyk het ook by onze Schryver blykt; des niet teegenſtaande zyn de *Fluxien* het bekwaamſte om deeze *Kromte ſtraalen* hunne waardyen te bepaalen, om dat de Oploſſing dan op alle de kromme lynen kan toegepaſt worden.

VIII.

VIII. VRAAGSTUK.

§. 194. *De misloopers* CB *en* CF (Fig. 29) *van eene hyperbel, en een punt* A *aan die kromme lyn gegeeven zynde; word gevraagt zoo veele punten van de hyperbel te bepaalen, als men begeert.*

OPLOSSING.

Trekt door het punt A eenige lynen BA*ab* en DAG*d* na gevallen, bepaald wordende en vallende tusschen de misloopers CB en CF. Neemt op die lynen de deelen *ab*=AB en G*d*=AD, en alle de op deeze wyze gevondene punten *g*, A, G en *a* enz. zullen aan de gevraagde hyperbel zyn. Elk van deeze stippen (als G) kunnen weederom dienen om 'er op dezelfde wyze eenige anderen aan de hyperbel te vinden, trekkende eenige nieuwe rechte lynen als FG, en G*f*, op welke dan weederom de deelen G*f*=GT genoomen moeten worden. Deeze oplossing is een noodzaakelyk

lyk gevolg van het geene hier voorens (§. 145.) betoogt is.

D. T. D. W.

IX. VRAAGSTUK.

§. 195. *Het brandpunt* F (Fig. 30.) *gegeeven zynde en nog drie punten* M, N *en* P *aan de kromme lyn, word gevraagd de Keegel-sneede te beschryven.*

OPLOSSING.

Het is klaarblykelyk dat ter oplossinge van dit Vraagstuk, de Leidslinie van de kromme lyn alleen bepaald behoeft te worden; dat is te zeggen, twee punten van de zelve. Ten dien einde zullen wy voor een ogenblik stellen dat het Vraagstuk opgelost is; naamentlyk dat de lyn BF die door het brandpunt F getoogen is, de waaren as van de gezochte kromme lyn is, en de lyn PL de Leidslinie van dezelve. Trekt uit de stippen M, N en P, de rechte lynen MF, NF en PF (wel-

(welke alle Voerstraalen van de gezochte kromme lyn zyn), en trekt op de Leidslinie BL, de loodrechte lynen MC ND en PE; trekt ook de rechten PNG en NML, bepaald wordende door de Leidslinie PL, en zy gesteld dat de deelen len PN en MN bekend zyn; beschryft eindelyk uit het brandpunt F als middelpunt met de straalen MF en NF, de boogen MH en NK, bepaald wordende aan de lyn FN en FP, zoodaanig dat HN=FN−FM zy, en PK=FP−FN. Dit gesteld zynde, weet men (§. 159.) dat de afstanden FP, FN, en FM der punten P, N en M, beneevens de afstanden PE, ND en MC van die zelvde punten tot de Leidslinie BL, altoos tot elkander in eene bestendige *Reeden* zyn; dus is FP: FN=PE: ND; en om dat de △n PEG en NDG aan elkander ∽ zyn; is PE: ND=GP: GN; dus FP: FN=GP: GN, en deelende FP−FN of PK: FN=GP−GN of PN: GN, by gevolg $GN=\frac{PN\times FN}{KP}$; op de zelvde wyze is

NL

$ML = \frac{MN \times FM}{NH}$; de waardyen deezer beide lynen GN en ML uit bekende grootheeden bestaande, zyn de twee punten G en L door welke de Leidslinie gaan moet, bekend; en dus is het Vraagstuk opgelost.

D. T. D. W.

X. VRAAGSTUK.

§. 196. *Het middelpunt* C (Fig. 31.) *van eene elips of hyperbel gegeeven zynde, beneevens de stand van twee raaklynen* TM *en* TN *aan dezelve, en de lengte van den eersten as* Aa; *word gevraagd deeze kromme lynen te beschryven.*

OPLOSSING.

Beschryft uit C als middelpunt met de straal CA, gelyk aan de helft van *Aa*, een cirkel-boog; snydende de gegeeve raaklynen TM en TN, in twee punten E en D; richt uit die punten E en D twee lynen EF en DF, ⊥ op die raaklynen, el-

kander snydende in het punt F; dan is F het brandpunt van de te beschryve kromme lyn. De stand van den grooten as *Aa* dus bepaald zynde, door het brandpunt F; zal men die lynen op de gewoone wyze kunnen beschryven. Deeze Oplossing is een nootzaakelyk gevolg van het geene (§. 69.) beweezen is, naamentlyk, dat den halven grooten as CA gelyk is aan de lyn CE, getoogen uit het middelpunt C tot het stip E van de raaklyn, uit welk de loodrechte lyn door het brandpunt F getoogen is. Het geene eeven op de zelvde wyze voor de hyperbel betoogt kan worden.

D. T. D. W.

Die geene welke begeerig mochten zyn, om de Vraagstukken na te zien, dienende om alle Keegel-sneeden op eene algemeene wyze te beschryven, zullen wel doen de *Principia Philosophiæ Naturalis* van *Newton* eens na te gaan van het 18de Voorstel tot het 30ste van het eerste Boek, beneevens het konstige Werk van *Maclaurin*, genaamd *Geometria Organica*.

ZES-



ZESDE HOOFTDEEL.

Behelzende eenige fraaye Kundigheeden wegens de Keegel-sneeden van hoogere machten; eene nieuwe Theorie *oover de stelkundige reekzen; gebruik van dezelve om den inhoud der Keegel-sneeden te vinden; toepassing van deeze reekzen op de hyperbolische* Logarithmi *of Kunst-tallen; de wyze van die te bereekenen op een voorbeeld toegepast. Aanmerkingen op de oneindige tusschenwyte of inhoud van de hyperbel, waar uit de betooging van twee eigenschappen dier kromme lyn gehaald worden, die hoewel teegenstrydig schynende, eevenwel waaragtig zyn, door een en het zelvde grondbegintzel.*

Zoo dra men begonnen was met de eigenschappen der Keegel-sneeden door middel van de Stelkunde na te gaan, en de zelve door vergelykingen aan te wyzen, was het byna niet meer moogelyk, zich alleen aan de vergelykin-

gen in de voorgaande Hooftdeelen gegeeven, te binden. Om dan aan de Eerstelingen een denkbeeld van deeze algemeenheid te geeven, en zoo veel moogelyk de lydinge te volgen, van die geene, welke het eersten de Keegel-sneeden van alle de machten naagevorst hebben, zullen wy beginnen, met de cirkel op eene algemeene wyze te beschouwen, en vervolgens zullen wy een Keegel aanduiden, wier grondvlak zoodaanig een cirkel is, en wy zullen trachten te doen zien, op wat wyze men in zoodaanig eene Keegel, de Parabels, Elipsen en Hyperbels van alle de machten snyden kan.

BEPAALINGE DER CIRKELS VAN ALLE DE MACHTEN.

§. 197. In de cirkel, zoo als wy die tot hier toe beschouwt hebben (*Fig.* 6.), is voor een iegelyke ordinaat en haare absciffen deeze eevenreedigheid AP: PM = PM: Pa gevonden, waar uit de vergelyking $y^2 = 2ax - x^2$ voortkomt; maar niets hindert 'er om eene kromme

lyn

lyn uit te denken, die dusdanig zy; dat men 'er deeze eevenreedigheid uit verkrygt, $\overline{AP}^m : \overline{PM}^m = \overline{PM}^n : \overline{Pa}^n$; noemende altoos de gegeeve lyn $2a$, de absciſſe AF, x; het deel Pa, $2a-x$ en de ordinaat PM, y; zal die eevenreedigheid veranderen in $x^m : y^m = y^n : (2a-x)^n$; waar uit de vergelyking $y^{m+n} = (2a-x)^n x^m$ voortkoomt; welke de eigenſchappen der cirkels van alle de machten aanwyſt. Laaten wy nu veronderſtellen dat een dier cirkels op een vlak beſchreeven is (*Fig.* 1.), booven welke een punt S zy; door wien een beweegelyke rechte lyn gaat, die met het onderſte eind alle de punten van de cirkel, aangeweezen door de vergelyking $y^{m+n} = (2a--x)^n x^m$, doorloopt; dan zal 'er door deeze beweeginge een Keegel voor alle de machten beſchreeven worden, in welke de Keegel-ſneeden van alle de *Orders* beſlooten zullen zyn, naament-

mentlyk het geslagt der Parabels, en dat der Elipsen en Hyperbels.

I. VRAAGSTUK.

§. 198. *De Vergelyking te bepaalen van een kromme lyn* (Fig. 3.), *voortkoomende uit de snydinge van een Keegel van alle de machten, door een vlak; welkers stand zoodaanig zy, dat den as* AB *van die voortkoomende kromme lyn eevenwydig is aan de zyde* DS, *en dat de gemeene sneede van het snydende vlak en de grond-cirkel loodrecht op den diameeter* CD *van die zelvde grond-cirkel staat.*

OPLOSSING.

Indien de keegel CSD gesneeden word door een vlak dat eevenwydig is aan het grondvlak, zal men eeven als in het eerste Hooftdeel kunnen betoogen, dat de rechte lynen MP*m*, NB*m*, FG en CD, eevenwydig aan elkander zyn, ieder aan ieder. Daar by, dewyl de rechten PM en BN cirkels-ordinaaten zyn, heeft men

MP

$\overline{MP}^{m+n} = \overline{FP}^{m} \times \overline{PG}^{n}$ en $\overline{BN}^{m+n} = \overline{CB}^{m} \times \overline{BD}^{n}$; by gevolg $\overline{MP}^{m+n}$: . . $\overline{BN}^{m+n} = \overline{FP}^{m} \times \overline{PG}^{n} : \overline{CB}^{m} \times \overline{BD}^{n}$, en deelende door de lynen $\overline{PG}^{n}$ en $\overline{BN}^{n}$ (die gelyke bestendige grootheeden zyn, als begreepen tusschen dezelvde eevenwydige lynen) heeft men, $\overline{MP}^{m+n}$: . . $\overline{BN}^{m+n} = \overline{FP}^{m} : \overline{CB}^{m}$, of $= \overline{AP}^{m} : \overline{AB}^{m}$; waar uit blykt, dat in de kromme lynen, (die deeze wyze van den keegel te snyden, verschaft) de gelykvormige machten $m+n$ der ordinaaten tot elkander zyn als de gelykvormige machten m en m haarer abscissen; waar uit dan volgt, dat alle deeze kromme lynen tot het geslagt der Parabels zyn behoorende.

D. T. D. en T. B. W.

GEVOLG.

§. 199. Wanneer 'er een grootheid p^n is, zoodaanig dat $\overline{MP}^{m+n} = \overline{AP}^m \times p^n$ zy; is het zigtbaar dat men ook voor iedere ordinaat B N deeze gelykheid heeft, $\overline{BN}^{m+n} = \overline{AB}^m \times p^n$; zoo men dan x voor een iegelyke absciffe fteld, en y voor haar ordinaat, is $y^{m+n} = p^n x^m$, de vergelyking van het geflagt der parabels. Indien $p = 1$ gefteld word, is $p^n = 1$, en by gevolg $y^{m+n} = x^m$; maakende $m+n = r$ is $y^r = x^m$; welke weederom een nieuwe vergelyking is van het geflagt der parabels.

II. VRAAGSTUK.

§. 201. *Word gevraagd het geflagt der kromme lynen te bepaalen, wanneer het fnyden-*

dende vlak de twee zyden van de Keegel onder den top ſnyd (Fig. 4.), *of wel den eene beneeden den top, en den ander booven dezelve* (Fig. 5.); *die ſneede worden altoos veronderſteld zoodaanig gedaan te zyn, dat de gemeene ſneede van het ſnydende vlak en van het grondvlak van de keegel, loodrecht op den diameeter* CD *van de grond cirkel is.*

OPLOSSING.

Laat 'er weeder veronderſteld worden, dat twee vlakken FMG en HLN de Keegel ſnyden, eevenwydig aan elkander zynde, en aan het grond-vlak van de Keegel; deeze vlakken FMG en HNL ontmoeten het ſnydende vlak in de lynen M*m* en N*n*, die ook eevenwydig aan elkander zyn, zoo wel als de diameeters FG en HL. Dierhalven zyn FMG en HNL, twee cirkels, en des geeven zy $\overline{MP}^{m+n} = \overline{FP}^{m} \times \overline{PG}^{n}$ en $\overline{NQ}^{m+n} = \overline{HQ}^{m} \times \overline{QL}^{n}$; bygevolg $\overline{MP}^{m+n}$:

$\overline{NQ}^{m+n} = \overline{FP}^{m} \times \overline{PG}^{n} : \overline{HQ}^{m} \times \overline{QL}^{n}$; maar de Δ^s PAF en QAH, $\backsim$ zynde, zoo is

$\left.\begin{array}{l} \overline{FP}^{m} : \overline{HQ}^{m} = \overline{AP}^{m} : \overline{AQ}^{m} \\ \text{en } \overline{GP}^{n} : \overline{LQ}^{n} = \overline{aP}^{n} : \overline{aQ}^{n} \end{array}\right\}$ ver-

meenigvuldigende deeze twee eevenreedigheeden met elkander, heeft men

$\overline{FP}^{m} \times \overline{GP}^{n} : \overline{HQ}^{m} \times \overline{LQ}^{n} = \overline{AP}^{m} \times \overline{aP}^{n} : \overline{AQ}^{m} \times \overline{aQ}^{n}$; dus is $\overline{MP}^{m+n} : \overline{NQ}^{m+n} = \overline{AP}^{m} \times \overline{aP}^{n} : \overline{AQ}^{m} \times \overline{aQ}^{n}$, dat is te zeggen, de gelykvormige machten $m+n$, der ordinaaten MP en NQ, zyn tot elkander als de rechthoeken der gelykvormige machten m en n haarer absciffen; en by gevolg zyn deeze kromme lynen van het geflagt der elipfen of der hyperbels.

D. T. D. en T. B. W.

I. GE-

I. GEVOLG.

§. 201. Dewyl de machten $m+n$ der ordinaaten altoos tot elkander zyn als de rechthoeken haarer absciſſen, tot de machten m en n verheeven; zoo volgt hier uit, dat die *Reeden* beſtendig is, en dus kan dezelve aangeweezen worden door deeze, $b^n : a^m$; of $p : a$; ſtellende dan de absciſſe AP$=x$, en den diameeter A$a=2a$, zal de andere absciſſe aP$=2a\mp x$ zyn; en noemende iedere ordinaat y, heeft men, $y^{m+n} : x^m (2a\mp x)^n = b^n : a^m = p : a$; waar uit de vergelykingen $y^{m+n} = x^m (2a\mp x)^n \frac{b^n}{a^m}$, of $y^{m+n} = x^m (2a\mp x)^n \frac{p}{a}$ voortkoomen, welke de eigenſchappen van het geſlagt der elipſen en dat der hyperbels teffens aanwyzen.

II. GEVOLG.

§. 202. Wanneer den oorsprønk der abscissen in het midden van den diameeter $2a$ gesteld wierd, had men AP $= \pm a \mp x$, en $aP = a + x$; by gevolg y^{m+n} : $(\pm a \mp x)^m (a + x)^n = p : a$; waar uit men weederom eene nieuwe vergelyking afleiden kan voor de geslagten der elipsen en der hyperbels, naamentlyk $y^{m+n} = (\pm a \mp x)^m (a + x)^n \frac{p}{a}$; die eeven als de voorgaande, een vergelyking van het geslagt der cirkels of van dat der *gelykzydige* hyperbels word, wanneer $p = a$ of $b = a$ is.

III. VRAAGSTUK.

§. 203. *Word gevraagd de algemeene vergelyking van het geslagt der hyperbels, weegens haare misloopers beschouwt.*

OP-

OPLOSSING.

Wy hebben (§. 156) gevonden, dat de vergelyking van de hyperbel, weegens haare misloopers beschouwt, deezen is $xy = c^2$, zoo men aan dezelve (eeven als aan de andere vergelykingen geschied is) algemeene *exponenten* geeft, verkrygt men $x^m y^n = c^{m+n}$; welke de gevraagde vergelyking is.

D. T. D. W.

GEVOLG.

§. 204. Door dien de bestendige $c = 1$ gesteld kan worden, volgt 'er dat $x^m y^n = 1$ ook een vergelyking is van het geslagt der hyperbels, weegens haare misloopers. Op de zelvde wyze is $y^n = \frac{1}{x^m} = x^{-m}$ of $y^n = x^{-m}$ ook zoodaanig een vergelyking; waar uit blykt, dat de verge-

gelyking y^r of $y^{m+n} = x^m$ van het geslagt der parabels, ook weegens de hyperbels plaats heeft, wanneer den *exponent m*, eene *negative* of ontkennende grootheid is.

I. GRONDLES.

§. 205. *Den inhoud van alle de kromme lynen wier onder-raaklynen en derzelver abscissen in eene bestendige* Reeden *tot elkander zyn, kunnen op eene analytische wyze bepaald worden* (Fig. 32).

BETOOGINGE.

Laat 'er een kromme lyn AM*m* naar gevalle genoomen worden, hebbende de lyn AP voor as, en aan de kruin A een raaklyn AQ, (aan welke de ordinaaten PM eevenwydig zyn), en noch een andere raaklyn M T, bepaald wordende door den as in het punt T; laat 'er door T de lyn TR, eevenwydig aan de ordinaaten MP getoogen zyn; daar by

by, laat 'er door twee ſtippen M en *m* oneindig digtby elkander, getoogen worden vier rechte lynen MP, en *mp*; MR en *mr*, eevenwydig aan de lyn TR en aan den as AP, ieder aan ieder. De vierkanten *mp*PM en *mq*QM kunnen aangezien worden als *aangroeiſels* (*elemens*) van de tuſſchen-wytens APMA en AQMA, daar by zyn de vierhoeken MP*pm* en MR*rm* of de *paralelogrammen* MP*p*O en RM*or* (die van deeze vierhoeken niet verſchillen dan door de gelyke oneindige kleine △ⁿ M*mo* en M*mo*) aan elkander gelyk (*); zoo men dan veronderſteld (gelyk hier gedaan word) dat PT tot PA in eene beſtendige *Reeden* is; zullen die *paralelogrammen* *r*RM*o* en *q*QM*o* ook in die zelvde *Reeden* tot elkander zyn (†), wyl zy deeze lynen PT en PA voor grondlynen hebben en van de zelvde hoogte zyn; by gevolg, zal ieder *aangroeiſel* van de tuſſchen-wyten APM tot het over-een-ſtemmend *aan-*

groei-

(*) Eucl. XLIII: 1. (†) Eucl. I: 6.

groeisel van de tusschen-wyte AQM, in die zelvde *Reeden* zyn; en dus zal de som van deeze *aangroeisels* aan de eene zyde tot de som der *aangroeisels* aan de andere zyde in die zelvde *Reeden* zyn (*). Zoo men dan die *Reeden* door deeze $m:n$, aanwyst; is APM : AQM $=m:n$; saamenstellende (†) APM : APMQ $=m:m+n$; dus APM $=$ APMQ $\times\frac{m}{m+n}=\frac{m}{m+n}xy$; by gevolg kan den inhoud van alle deeze kromme lynen bepaald worden, dewyl zy eene gegeevene en eindige *Reeden* hebben met den rechthoek der absciſſen.

D. T. B. W.

(*) Eucl. XII: 5. (†) Eucl. XVIII: 5.

I. Het is niet moogelyk den inhoud van eene kromme lyn te bepaalen, zonder behulp van de *Reekening der oneindigen* (*Calcul des Infinis*); want daar moet altoos verondersteld worden, dat de Kromlinische inhoud APM gedeeld is in een oneindig getal oneindige kleine stukjes MP*pm*; welke kleine stukjes, *Aangroeisels* (*Elements*) *Verschillen* (*Differences*) of *Fluxien* van den inhoud APM genoemd worden; by gevolg zal de som

van

van alle deeze *aangroeisels* of *Fluxien*, te saamen genoomen, gelyk zyn aan den geheelen inhoud *Apm*; of wel het zal de *Fluente* of *Integrale* zyn van de *Fluxie* MP*pm*.

II. Het is verwonderlyk met hoe weinig moeite men den inhoud van een kromme lyn door middel van de *Fluxie* Reekening bekoomen kan, en daarom is zy ook aan te pryzen booven alle andere byzondere manieren, die men ten dien einde heeft uitgedagt; om dat deeze altoos moejelyker zyn, en in de meeste gevallen zeer bedriegelyk.

III. De tusschen-wyte of *aangroeisel* M*mp*P oneindig klein verondersteld wordende; (dat is te zeggen, een tusschen-wyte waar van den inhoud minder is als eenig gegeeve groote) zoo is Eerstelyk de grondlyn P*p* oneindig klein. Ten tweede; staat de ordinaat *pm*, oneindig digt by de ordinaat MP; zoo men dan een lyn MO trekt loodrecht op *pm*, zal *m*O $=$ *p m* — PM, oneindig klein zyn. Ten derde; zal de kromte van de boog M*m* ook oneindig min weezen, en daarom kan dezelve als een rechte lyn genoomen worden; by gevolg zal het *aangroeisel* M*mp*P een rechtlinische vierhoek zyn, gelyk aan $\triangle$MO*m* + *paralelogram* MO*p*P $= \frac{Om \times MO \text{ of } Pp}{2} + PM \times Pp$; maar $\frac{Om \times MO \text{ of } Pp}{2} : PM \times Pp = \frac{Om}{2} : PM$; dat is te zeggen, gelyk het oneindige kleinen tot het eindigen is; waar uit volgt, dat de $\triangle$ MO*m*

verwaarlooft kan worden als te min zynde in vergelyk van den rechthoek PMOφ, en dus zal de ongeschikte vierhoek PMmp, of het *aangroeisel* van den inhoud AFM, gelyk zyn aan den rechthoek MPpm = MP × Pp. Maar Pp is een oneindig klein deel van de absciffe, by gevolg is het *aangroeisel* van eene krom-lynischen inhoud (door eene ordinaat en haare absciffe bepaald) gelyk aan den rechthoek van de ordinaat, en het oneindige kleine stuk van haare absciffe.

I. Gevolg.

§. 206. Of schoon de kromme lyn met haare bolle kant naar den as toegekeert was (eeven als in *Fig.* 33.) is het Voorstel niet minder waarachtig; als maar de onder - raaklyn derzelver in eene bestendige Reden is met de absciffe AP; want laat 'er een bepaald *paralelogram* ABCD in beschreeven zyn, en laat 'er voor 't overige de zelfde faamenstelling gedaan worden als in de voorgaande *Figuur*; dan is het zigtbaar dat ieder *aangroeisel* MPpm of MRrm, van de onbepaalde tusschen - wyte BCGF, staat tot het overeenstemmend *aangroei-*

sel

sel MQqo van de tusschen-wyte AFGCD gelyk PT: AP$=m;n$, en neemende de som deezer beide *reekzen*, BFGC: AFGCD$=m:n$; dus BFGC; AFGCD−BFGC of ABCD$=m:n-m$. By gevolg is BFGC$=\frac{m}{n-m}\times$ABCD, het welke altoos eene bepaalde grootheid weezen zal, zoo lang de noemer $n-m$ niet gelyk aan nul is.

II. GEVOLG.

§. 207. Wanneer de *Reeden* van m tot $\pm m+n$ eene *meetbaare Reeden* is, zal de kromme lyns inhoud geheelyk kunnen bepaald worden; zoo het in teegendeel eene *onmeetbaare Reeden* is, zal de inhoud vinding niet minder volleedig zyn, maar men zal egter de zelve niet in getallen dan door naadering kunnen aanwyzen. Daar zyn dan in 't algemeen drie soorten van de inhoud-vindingen, voor de stelkundige kromme lynen; naamentlyk geheele en volmaakte, dat zyn die door eindige of wortelige getallen aangewee-

zen kunnen worden; volmaakte en niet geheele, die door eindige grootheeden maar die met *onmeetbaare* wortel-teekenen aangeweezen worden, en eindelyk die geene welke niet dan door naaderende *reekzen* gevonden worden, en welke *reekzen* zelvs niet tot eene uitdrukking te brengen zyn, te ſaamen geſteld uit *onmeetbaare* grootheeden. Daar is groote waarſchynelykheid dat de inhoud-vinding van de cirkel en van de elips, van deeze laatſte ſoort zyn; gelyk gemakkelyk uit onze *Theorie* af te leiden is.

I. VOORBEWYS.

§. 208. *Indien* $1-z^{\frac{n}{m}}$ *door* $1-z$ *gedeeld word, zal den uitkomſt gelyk zyn aan deeze* reeks

$$\frac{1+z+z^2+z^3+z^4+ \text{enz.}}{1+z^{\frac{n}{m}}+z^{\frac{2n}{m}}+z^{\frac{3n}{m}}+z^{\frac{4n}{m}}+ \text{enz.}}$$

BETOOGINGE.

Laat'er eene meetkunſtige *progres* zyn

$\div 1$

$\div\div 1, z^1, z^2, z^3$, enz. hebbende z voor *Reeden*, en zy het getal der zelver termen $= n$; dit zynde is de laatſte term $= z^{n-1}$; maar de ſom van alle de voorgaande of *Antecedenten* ſtaat tot de ſom van alle de volgende of *Conſequenten*, gelyk eene voorgaande ſtaat tot zyn volgende (*). Zoo men dan de ſom van alle de termen $= s$ ſteld, zal die van alle de voorgaande $= s - z^{n-1}$ zyn, en die van alle de volgende $= s - 1$; het welke deeze eevenreedigheid verſchaft $= s - z^{n-1} : s - 1 = 1 : z$; by gevolg is $(s-1)1 = (s - z^{n-1})z$, of $s - 1 = zs - z^n$; en dus $s = \frac{1-z^n}{1-z}$. Zoo men nu nog eene meetkunſtige *progres* heeft, welkers getal termen $= m$ is, hebbende $z^{\frac{n}{m}}$ voor *Reeden*, zal men deeze gelykheid vinden

$$1 + z^{\frac{n}{m}} + z^{\frac{2n}{m}} + z^{\frac{3n}{m}} + z^{\frac{4n}{m}} + \ldots + z^{\frac{n(m-1)}{m}} =$$

(*) Eucl. XII: 5.

$$=\frac{1-z^{\frac{n}{}}}{1-z^{\frac{n}{m}}}$$; deelende deeze *progressien* door elkander als meede hunne sommen, heeft men . . . .

$$\frac{1-z^{\frac{n}{m}}}{1-z}=\frac{1+z+z^2+z^3+z^4+\ .\ .\ +z^{n-1}}{1+z^{\frac{n}{m}}+z^{\frac{2n}{m}}+z^{\frac{3n}{m}}+z^{\frac{4n}{m}}+\ .\ .\ z^{\frac{n(m-1)}{m}}}$$

D. T. B. W.

Den Schryver zegt in zyn Voorreeden, dat deeze Grondles door den Heer *Landen* is uitgevonden, en dat dezelve hem door een zyner Vrienden is meedegedeelt. De Heer *Landen* heeft in 't Jaar 1758, het Ontwerp van een nieuwe Reekening uitgegeeven, voerende voor tytel *A Discourse concerning the Residual Analysis, a new branch of the Algebraic Art.* Welke nieuwe Reekening op deeze Grondles gebouwd is; maar dien Engelsche Wiskunstenaar geeft het zelve zonder betooging. Het is hier de plaats niet deeze Reekening te onderzoeken, het zy genoeg aan te merken dat den Heer *Landen* vermeend, dat zy van het eigen gebruik zal weezen, als de *Fluxie* Reekening, en heeft belooft een volkoome Stuk hier van in 't ligt te geeven.

II.

II. VOORBEWYS.

§. 209. *Word gevraagd te bepaalen, de Analytische waardy der Onder-raaklynen van alle de kromme lynen door de algemeene Vergelyking* $y^m = x^n$ *aangeweezen.*

OPLOSSING.

Laat 'er een snylyn *m*MT (*Fig.* 34.) verondersteld worden te zyn, bepaald wordende door den as PA in het punt T, en zy gesteld, dat de absciffen AP = *x*, en A*p* = *z* zyn; laaten ook haaren overeenstemmende ordinaaten PM = *y* en *pm* = *u* gesteld worden. Het is zigtbaar dat de *Reeden* van PM tot de onder-raaklyn PT eeven dezelve is als die van R*m* tot RM, om dat de △ *m* R M ∽ is △MPT. De vergelyking $y^m = x^n$ geeft $y = x^{\frac{n}{m}}$; op de zelvde wyze is *u*

$= z^{\frac{m}{n}}$; by gevolg pm — PM of m R $=$ $z^{\frac{n}{m}} - x^{\frac{n}{m}}$ en Pp of MR $= z - x$; en om dat PM : PT $= m$R : MR is, zal $\frac{PM}{PT} = \frac{z^{\frac{n}{m}} - x^{\frac{n}{m}}}{z - x}$ zyn; deelende dan den noemer door z en den teller door $z^{\frac{n}{m}}$, en vermeenigvuldigende door $z^{\frac{n}{m} - 1}$, is $\frac{PM}{PT} = z^{\frac{n}{m} - 1} \times \frac{\left[1 - \frac{x}{z}\right)^{\frac{n}{m}}\Big]}{1 - \frac{x}{z}}$; stellende kortheids-halven $\frac{x}{z} = t$, heeft men weederom $\frac{PM}{PT} = z^{\frac{n}{m} - 1} \times \frac{\left[1 - t^{\frac{n}{m}}\right]}{1 - t}$; het welke door het voorgaande *Voorbewys* verandert in $z^{\frac{n}{m} - 1} \times \left(\frac{1 + t + t^2 + t^3 + \ldots t^{n-1}}{1 + t^{\frac{n}{m}} + t^{\frac{2n}{m}} + t^{\frac{3n}{m}} + \ldots t^{\frac{n}{m} \times (m-1)}} \right)$

Laat'er nu veronderfteld worden, dat de lyn

pm

pm zich met PM vereenigt, dan zal de onder-snylyn in een onder-raaklyn veranderen, en dus zal AP of $x = Ap$ of z worden; en by gevolg $\frac{x}{z}$ of $t = 1$; maar den teller van de breuk die $z^{\frac{n}{m}-1}$ vermeenigvuldigt, is eene meetkunstige *progres* welkers getal termen $= n$ is, en den noemer van die breuk is ook eene meetkunstige *progres*, welkers getal termen $= m$ is; by gevolg zal deeze breuk veranderen in een getal n eenheeden gedeeld door een getal m eenheeden, dewyl $t = 1$ is. Dus ook $\frac{PM}{PT} = z^{\frac{n}{m}-1} \times \frac{n}{m}$ of dewyl $x = z$ is, $\frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1} = \frac{nx^{\frac{n}{m}}}{mx}$; stellende dan y in de plaats van $x^{\frac{n}{m}}$, heeft men $\frac{PM}{PT} = \frac{y}{PT} = \frac{ny}{mx}$; by gevolg is $PT = \frac{mx}{n}$.

D. T. D. W.

Hoe wel onzen Schryver de Grondles van den Heer *Landen* hier gebruikt om de onder-raaklynen te vinden; zoo gebruikt hy nochtans de manier van dien Meetkonstenaar in 't vervolg niet; maar dat laat niet naa dat de wyze van onze Schryver in verre naa zoo algemeen niet is als die van den Heer *Landen*, zynde maar alleen goed voor de parabolische kromme lynen door de algemeene vergelyking $y^m = x^n$ aangeweezen.

I. GEVOLG.

§. 210. Dus ziet men dat den inhoud bepaald kan worden van dat geslagt kromme lynen, welke door de algemeene vergelyking $y^m = x^n$ aangeweezen zyn; dewyl de onder-raaklyn van alle deeze lynen in eene bestendige *Reeden* is met de abscisse; gelyk uit de vergelyking $PT = \frac{mx}{n}$ blykt, welke deeze eevenreedigheid geeft $m : n = PT : x$. Ook zal de algemeene *Formula* (§§. 205 en 206.) van de tusschen-wyte of inhoud $APM = \frac{m}{m+n} xy$,

ver-

veranderen (stellende voor y deszelfs waardy $x^{\frac{n}{m}}$) in APM $= \frac{m}{m+n} x^{\frac{n+1}{m}} = \frac{m}{m+n} x^{\frac{n+m}{m}}$. Op de zelvde wyze zal de *Formula* van den inhoud der *aanvulsels* (*Complements*) A Q M; in AQM $= \frac{n}{m+n} xy = \frac{n}{m+n} y^{\frac{m+1}{n}} = \frac{n}{m+n} y^{\frac{m+n}{n}}$ veranderen, stellende voor x deszelve waardy $y^{\frac{m}{n}}$.

II. GEVOLG.

§. 211. Wanneer 'er verondersteld word dat de abscissen AP en Ap aangroeijende zyn eeven als de telkunstige *progres* $\div$ 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. enz., en dat de *Eenheid* of verschil van deeze *progres*, eene *oneindige kleinen* zy, zoo wel als iedere ordinaat $y = x^{\frac{n}{m}}$; is het baarblykelyk dat deeze ordinaaten niet anders zyn als de termen van deeze *progres*, alle tot de macht $\frac{n}{m}$ verheeven; by gevolg zal de som van alle deeze ordinaaten

ten, of den inhoud van de geheele kromme lyn, gelyk zyn aan de ſom van alle de termen van deeze *reeks* $0^{\frac{n}{m}}$, $1^{\frac{n}{m}}$, $2^{\frac{n}{m}}$, $3^{\frac{n}{m}}$, en zoo voort tot aan $x^{\frac{n}{m}} = \infty^{\frac{n}{m}}$ toe, om dat men altoos veronderſtellen mag, dat eene bepaalde abſciſſe AP een oneindig aantal van deeze oneindige *kleine* deelen in zich bevat (*). Op dezelvde wyze indien 'er veronderſteld word, dat de deelen AQ, en *Aq* enz. of de ordinaaten PM en *pm* (die aan AQ en *Aq* gelyk zyn) ook meede in zoodaanig eene telkunſtige *Reeden* aangroejen, en dat iedere abſciſſe $x = y^{\frac{m}{n}}$ is; zoo zullen de lynen QM en *qm* enz. de machten $\frac{m}{n}$ haarer ordinaaten zyn; by gevolg zal de ſom van alle deeze lynen QM, en *qm* enz. of den inhoud van het *aanvulſel* MAQ de ſom zyn van alle de termen der *reeks* natuurlyke getallen, alle tot de zelvde macht $\frac{m}{n}$ verheeven.

III.

(*) Zie de Aanteekening op de volgende §.

III. GEVOLG.

§. 212. By gevolg geeft de inhoudvinding der kromme lynen van het geflacht $y^m = x^n$, ook de oplóssinge van dit Vraagstuk. *De som te bepaalen, der gelykvormige machten van alle de moogelyke getallen, begreepen tusschen nul en het oneindige.*

De *Formula*, $\frac{m}{m+n} x^{\frac{n+m}{m}}$ of $\frac{n}{m+n} y^{\frac{m+n}{n}}$, wyzen ons aan wat 'er gedaan moet worden om dit Vraagstuk op te lossen, naamentlyk. *Doet de eenheid tot den* exponent *van de gegeeve macht; en deeld door deeze nieuwe* exponent *de laatste term of het grootste* aangroeisel, *verheeven zynde tot die macht, welke de nieuwe* exponent *dus vermeerdert aanwyst.* Wy zullen dit door eenige voorbeelden ophelderen.

§. 213. Laat 'er begeerd worden te bepaalen, de som der onderlingen machten

ten $\frac{m}{n}$ van alle de natuurlyke getallen die begreepen zyn tusschen nul en het oneindige. De som der eerste machten zal volgens de *Formula* $\frac{m}{m+n}x^{\frac{n+m}{n}}$ gelyk zyn aan $\frac{1}{2}\infty^2 = \frac{1}{2}\infty \times \infty$, welke den inhoud is van een driehoek door de vergelyking, $y^{\frac{m}{n}} = x$ aangeweezen, en waar van de *aangroeisels* (gelyk bekend is) van den top af tot aan de grondlyn toe in eene telkundige *progres* toeneemen. Volgens deeze zelvde *Formula*, zullen de somme der 2de, 3de, 4de, en 5de machten, enz. *respectivelyk* gelyk zyn aan $\frac{1}{3}\infty^3$, $\frac{1}{4}\infty^4$, $\frac{1}{5}\infty^5$, $\frac{1}{6}\infty^6$. Eeven zoo gemakkelyk vind men de som van alle de wortels van die zelvde *reeks* natuurlyke getallen; wanneer 'er in den *exponent* $\frac{n}{m}$, $n = 1$ en m *successivelyk* gelyk gesteld word aan 1, 2, 3, 4, enz. want de som van alle deeze 2de, 3de, 4de, wortels enz.; zal gelyk zyn aan $\frac{2}{3}\infty^{\frac{3}{2}}$, $\frac{3}{4}\infty^{\frac{4}{3}}$, $\frac{4}{5}\infty^{\frac{5}{4}}$ enz. Het is on-

onverschillig wat waardy 'er aan de breuk $\frac{n}{m}$ gegeeven word. Alle deeze sommen zoude kunnen aangeweezen worden door onderschillende machten van x, in de onderstellinge, dat deeze x in een oneindig aantal gelyke deelen gedeeld is (*); en dit zynde zal men voor de som der 2de, 3de, wortels enz., deeze waardyen vinden $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$, $\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}$, en zoo vervolgens.

(*) Hoewel het getal termen oneindig groot is, kan het zelve nochtans door eene eindige grootheid aangeweezen worden, als by voorbeeld door een lyn; dewyl een iegelyke lyn gedeeld kan worden in een oneindig aantal gelyke deelen of eenheeden. Zie *Keil Inleiding tot de Natuur en Sterrekunde*, *in de Aanmerking op pag.* 22.

Om dan de som van alle de machten n der natuurlyke getallen van 1 tot in 't oneindige te neemen, zal men tot den *exponent* n der grootheid x^n de eenheid voegen en die grootheid dus vermeerdert door zyn vermeerderde *exponent* deelen; bygevolg zal de som der x^n gelyk zyn aan $\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

IV.

IV. GEVOLG.

§. 214. En omgekeerd; naadien een degelyke grootheid aangemerkt kan worden als de som van een *reeks* natuurlyke getallen; alle tot een zelve macht verheeven; zoo kan het *aangroeisel* van zoodaanig een grootheid gemakkelyk gevonden worden, door het teegengestelde van het zoo eevene betoogde; 't welk hier op uitkomt. *Vermeenigvuldigt de gegeeve grootheid door zyn* exponent, *en geeft aan dezelve eene andere die van de eenheid vermindert is*; deeze nieuwe uitdrukking zal het gevraagde *aangroeisel* zyn. Om dan de *aangroeisels* der grootheeden $\frac{1}{2}x^2$, $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{1}{4}x^4$, $\frac{n}{m}x^p$ aan te wyzen; schryft men dezelve als volgt, $\frac{2\times1}{2}x^{2-1}$, $\frac{3\times1}{3}x^{3-1}$, $\frac{4\times1}{4}x^{4-1}$, en $\frac{pn}{m}x^{p-1}$; of wel x, x^2, x^3, en $\frac{pn}{m}x^{p-1}$; waar uit blykt, dat de voorgestelde grootheeden de sommen zyn van alle

de

de moogelyke x; of van alle de moogelyke getallen in x begreepen, verheeven zynde tot de machten 1, 2, 3, enz. $p-1$; en dat die *aangroeisels* ook bepaalde en eindige *Coeficienten* kunnen hebben, gelyk plaats heeft in de algemeene *Formula* $\frac{pn}{m} x^{p-1}$.

1. Het is dan klaarblykelyk dat men x^n door middel van $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ weeder kan vinden; dat is te zeggen, die macht x^n waar van de som $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ gegeeven is; doende ten dien einde maar eene teegengestelde bewerking; naamentlyk, *Trekt van den* Exponent n+1 *de eenheid af en vermeenigvuldigt de grootheid door* n+1; de uitkomst zal de gevraagde x^n zyn.

De grootheid $\dot{x}^n$ kan dus beschouwt worden als het *aangroeisel* van $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, en inderdaad dewyl de *Eenheeden* in welke x gedeeld is, oneindige kleine deelen van dezelve zyn, behoorde men ze aldus te teekenen $\dot{x}$; (eeven als men de *Fluxien* of oogenblikkelyke aanwassen der hoe grootheeden teekend) dus doende zal $\dot{x} = 1$

S zyn

zyn en $\dot{x^n} = x^n \dot{x}$; waar uit blykt, dat de som van de $x^n \dot{x}$ (ook *Fluente* of *Integraale* van $x^n \dot{x}$ genoemd) gelyk is aan $\frac{x^{n+1}}{n+1}$; op dezelve wyze is de *Fluente* of *Integraale* van $a\dot{x}\sqrt[3]{x^2} = a x^{\frac{2}{3}} \dot{x}$ gelyk aan $\frac{ax^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} = \frac{3ax\sqrt[3]{x^2}}{5}$. Eeven zoo is de *Fluxie* van $ax^{\frac{3}{4}}$ gelyk aan $\frac{3}{4}\, a x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3a}{4\sqrt[4]{x}}$.

II. Zie daar de Reekening der oneindige op eene eenvoudige wyze voorgesteld; die geene welke deeze Reekening zoude willen beginnen (het voornaamste Werktuig waar meede eenige ondekkingen in onze Eeuw gedaan worden) moeten wel acht geeven op het gezegde in deze twee laatste §§, men ziet 'er dat de *Fluente* of *Integraale* Reekening, het omgekeerde is van die der *Fluxien*. Door de *Integraale* Reekening leid men het *eindigen* af van het *oneindige kleine*, te weeten $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ van $x^n\dot{x}$; en de *Fluxie* Reekening leid het *oneindige kleinen* $x^n\dot{x}$ af van het *eindige* $\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

AAN-

AANMERKINGE.

§. 215. Men zoude deeze *Theorie* nog verder kunnen uitbreiden, welke inderdaad niets van de *Differentiaal* en *Integraal* Reekening verschilt, dan alleen dat men in die Bereekeninge het oneindige kleine deel door een teeken aanwyst, en dat het zelve hier gelyk aan de eenheid gesteld word. Het welke *Newton* ook op de zelvde wyze heeft gedaan, in een klein werkje dat aan het einde van zyne Grond-beginzelen geplaatst is, in dewelke deezen grooten Man begind (eeven als wy gedaan hebben) met de inhoud-vinding der kromme lynen van de vergelyking $y^m = x^n$; tot welke vergelyking hy niet alleen de inhoud-vinding van de andere kromme lynen toepast, maar zelfs ook haare *Gelykmaaking* (*rectification*); en waar van men ook teffens de *teerlings* of lighaamelyken inhoud (*cubature*) der lighaamen, en hunne *zwaartens middelpunten* (*centre de gravité*) zoude kunnen aflei-

den. Dit gedeelte van ons werk kan als een aanmerking aangezien worden op dat van den Heer *Newton*, het welke voor tytel voert. *Methodum* . . . . . *&c. breviter explicatam potiùs quàm accuratè demonstratum.*

IV. VRAAGSTUK.

§. 216. *Word gevraagd om door middel van een reeks den inhoud van de gemeenen parabel* (Fig. 32.) *te bepaalen.*

OPLOSSING.

Den inhoud van een parabel-ſtuk APM kan veronderſteld worden uit een oneindige groote meenigte ordinaaten te beſtaan (*), hebbende voor haare absciſſen

(*) Indien men eenige moeite had om zich een inhoud voor te ſtellen die ſaamen geſteld was uit rechte naaſt elkander geplaatſte lynen, om dat de lynen geen oppervlakte hebbende zy 'er ook geene voortbrengen kunnen, hoewel uit nog zoo een meenigte beſtaande; kan men die oppervlakte APM gelyk ſtellen aan de ſom van een on-

ſen alle de moogelyke deelen van de abſciſſe-lyn, welke deelen alle volgens eene telkunſtige progres 0. 1. 2. 3. enz. aangroejen en welkers verſchil, een oneindig klein deel van AP is (zynde de eenheid). Alle de ordinaaten nu tot elkander ſtaande als de vierkants-wortels haarer absciſſen (§. 24.) zoo zullen zy ook tot elkander zyn als de vierkants-wortels van de termen der reeks, 0, 1, 2, 3, enz. By gevolg is den inhoud van

oneindig aantal kleine rechthoeken AP*pm* hebbende voor hoogtens de verſchillende ordinaaten van de kromme lyn, en ieder in 't byzonder eene gelyke grondlyn P*p*, (welke P*p* een oneindig klein deel van AP of *x* geſteld word te zyn, en hier door de eenheid is aangeweezen) nu hebben alle deeze verſchillende rechthoeken AP*pm*. enz eene gelyke grondlyn, dierhalven zyn die tot elkander als hunne hoogtens (*Eucl.* I. 6) en deeze hoogtens zyn de ordinaaten; by gevolg is de ſom van alle deeze kleine rechthoeken of de geheelen inhoud van de kromme lyn ook in dezelvde *Reeden* als die ordinaaten (*Eucl.* XII. 5). Dus ziet men hoe deeze twee verſchillende wyzen op het zelvde uitkoomen, hoewel deeze laatſten alleen volkoomen Meetkunſtig is.

van het parabel-deel gelyk aan de som der termen van deeze *reeks* $0^{\frac{1}{2}}, 1^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{2}}$ enz. . $x^{\frac{1}{2}} = \infty^{\frac{1}{2}}$. Neemende de som volgens de *Formula* $\frac{m}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$, en maakende $m = 2$ en $n = 1$, zal den inhoud van het gegeeve parabel-stuk gelyk zyn aan $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} xy$, stellende y in plaats van $x^{\frac{1}{2}}$. Deezen inhoud is eeven dezelvde als die welke wy reeds op eene andere wyze bepaald hadden (§. 51).

D. T. D. en T. B. W.

V. VRAAGSTUK.

§. 217. *Word gevraagd den inhoud te vinden van een elips-deel* CBMP (Fig. 17.) *dat bepaald is door een deel* CP *van den as of van eenig diameeter, door den tweeden as of meede-diameeter* CB, *door een deel* BM *van de kromme lyn en door een ordinaat* PM; *neemende den oorsprong der absciffen in het middelpunt.*

Op-

OPLOSSING.

Wy veronderstellen weederom dat de oppervlaktens, wier inhoudden gevraagd worden, te saamen gesteld zyn uit een oneindig aantal digt naast elkander geleegene ordinaaten welkers absciffen eeven zoo aangroejen als de telkunstige progres o, 1, 2, 3, 4, 5, enz. hebbende een oneindig klein deel van AP tot verschil (welke hier door de eenheid aangeweezen word). De vergelyking der elips (§. 59.) is gevonden te zyn $y^2 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$; ontbindende $\sqrt{a^2-x^2}$ en trekkende de wortel uit dezelve, verkrygt men deeze oneindige *reeks* $y = \frac{b}{a} \times \left(\frac{ax^0}{1} - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}\text{ enz.}\right)$ waar in de *coeficienten*, naamentlyk . . . $a - \frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3} - \frac{1}{16a^5}$ enz. bestendig zyn voor iedere ordinaat y; indien men de som van alle de moogelyke ordinaaten neemen

men wil; moeten alle deeze *Coeficienten* vermeenigvuldigt worden door de som van alle de moogelyke x, verheeven tot de machten wier *exponenten* (zynde de getallen 0, 2, 4, 6. enz.) aan ieder deezer *coeficienten* beantwoordende zyn. Maar het is gebleeken door de *Formula*

$\frac{m}{m+n} x^{\frac{n}{m}+1}$, dat de som van alle deeze onderlinge machten gelyk is aan x, $\frac{x^3}{3}$, $\frac{x^5}{5}$, $\frac{x^7}{7}$ enz. by gevolg zal den inhoud van het elips deel CPMB door deeze *reeks* . .

$bx - \frac{bx^3}{6a^2} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^8}$, enz.

aangeweezen worden. Naar maate nu dat x klein is in vergelyk van a, zal deeze *reeks* ook rasser afneemen (*) en by gevolg ook eerder aan de waare waardy naaderen. Door dien nu tot nog toe de som van deeze *reekzen* niet volkoomen heeft kunnen bepaalt worden, is den inhoud van de elips eigentlyk ook nog niet dan by naadering gevonden.

I. GE-

(*) Zie Maclaurin *Traité d'Algebre* II. *Partie Chapitre* XII.

I. GEVOLG.

218. Wanneer $x = a$ gesteld word, is het vierde deel van de elips $= ab - \frac{1}{6}ab - \frac{1}{40}ab - \frac{1}{112}ab - \frac{1}{1152}ab$, enz. of $ab \times (1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{1}{1152}$ enz.) waar van het viervoud, gelyk is aan den inhoud van de geheele elips. Wanneer $b = a$ gesteld word, eeven als in de cirkel, zal de *reeks* $a^2(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{1}{1152}$, enz.) den inhoud van de cirkel aanwyzen; en hoe meer termen 'er genoomen worden hoe naader dezelve bepaald zal weezen.

II. GEVOLG.

§. 219. De oppervlaktens van twee elipsen staan tot elkander als den rechthoek haarer assen. Dit is een natuurlyk gevolg van dat ieder derzelver gelyk is aan $4ab$ vermeenigvuldigt door dezelvde *reeks* $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40}$ enz. Daar by volgt hier nog uit, dat indien 'er een lyn c genoomen word, midden eevenreedige tusschen a en b, zal den inhoud van de

 elips

elips gelyk zyn aan die van een cirkel met de ſtraal c beſchreeven; eeven als men reeds (§. 110.) betoogt heeft.

V. VRAAGSTUK.

§. 220. *Word gevraagd den inhoud van een hyperbel-deel* A C Q M *te bepaalen* (Fig. 22).

OPLOSSING.

Wy hebben (§. 121.) getoont, dat wanneer men de abſciſſen CQ op de tweeden as neemt, en dat haar ordinaaten QM eevenwydig zyn aan den eerſten as, dan ook $\overline{QM}^2 : \overline{CQ}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2$ is; zoo men CQ $= x$ ſteld, QM $= y$, AC $= a$ en CB $= b$, is $y^2 : x^2 + b^2 = a^2 : b^2$; by gevolg $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 + b^2}$. Ontbindende deeze wortel grootheid, heeft men $y = \frac{a}{b} \times \ldots$ $\left(\frac{bx^0}{1} + \frac{x^2}{2b} - \frac{x^4}{8b^3} + \frac{x^6}{16b^5} - \frac{5x^8}{128b^7}, \text{ enz.}\right)$

Doen-

Doende dezelvde reedeneeringen als in het voorgaande Vraagstuk en neemende de som van iedere term deezer *reeks*, zal de hyperbolische inhoud ACQM gelyk zyn aan $ax\left(1+\frac{x^2}{6b^2}-\frac{x^4}{40b^4}+\frac{x^6}{112b^6}-\frac{5x^8}{1152b^8}+\frac{7x^{10}}{2816b^{10}}\text{ enz.}\right)$ die des te rasser afneemen zal, naar maate x kleinder is als b.

D. T. D. W.

I. GEVOLG.

§. 221. Wanneer $x=b$ gesteld word, zal den inhoud van het hyperbel-stuk gelyk zyn aan $ab\times$ . . . . . .

$$\left(1+\frac{1}{6}-\frac{1}{40}+\frac{1}{112}-\frac{5}{1152}+\frac{7}{2816},\text{enz.}\right);$$

en wanneer de hyperbel *Gelykzydig* (*equilatere*) is, of het geene op het zelvde uitkomt, wanneer $a=b$ is, zal de hyperbolischen inhoud ACBM gelyk zyn aan het vierkant a^2 vermeenigvuldigt door deeze zelvde *reeks*; op de welke aan te merken is, dat wanneer men eene onge-

gelykzydige hyperbel met eene gelykzydigen vergelykt; zullen de inhoudden of *Aria* van dezelve, op een en zelvde absciſſe genoomen, tot elkander in de eige *Reeden* zyn als de ongelyke aſſen. By gevolg geeft de inhoudvinding van de gelykzydigen hyperbel, die van alle de anderen; eeven als de indhoudvinding van de Cirkel die van alle de elipzen geeft.

II. GEVOLG.

§. 222. Indien men van den rechthoek CPMQ $= xy$ den inhoud ACQM, aftrekt, verkrygt men dat der halven *Segment* APM. Op de zelvde wyze kan den inhoud bepaald worden van den *Sector* CMA, die beſlooten is door den diameeter CM, den eerſten as AC en de kromme lyn AMM, wanneer de △CQM $= \frac{1}{2}xy$ van den inhoud ACQM afgetrokken word.

VII. VRAAGSTUK.

§. 223. *Word gevraagd den inhoud te bepaalen, die begreepen is tusschen de hyperbel en baare mislooper* (Fig. 35).

OPLOSSING.

Deezen inhoud kan aangemerkt worden, als bestaande uit een oneindig aantal kleine rechthoeken (eeven als BblL) hebbende elk in 't byzonder een oneindig klein deel van een der misloopers voor grondlyn, en voor hoogtens de *correspondeerende* ordinaaten BL. Alle deeze rechthoeken een gelyke grondlyn hebbende, zal de som derzelver of de hyperbolischen inhoud, als de som van alle die ordinaaten zyn. Daar by heeft men (§. 203.) gezien, dat de algemeene misloopers-vergelyking deeze is, $x^m y^n = c^{m+n}$, of stellende $c = 1$, is $y^n = \frac{1}{x^m}$ of

wel

wel $y = x^{\frac{-m}{n}}$; en neemende de *Formula* (§. 212,) zal de som van alle de y (of de *mislopers* inhoud) gelyk zyn aan $\frac{n}{n-m} x^{\frac{n-m}{n}} = \frac{n}{n-m} xy$, zoo men deeze *Formula* op de hyperbel toepast, maakende m en $n = 1$, zal de *misloopers* inhoud gelyk zyn aan $\frac{xy}{0}$; welke altoos eene oneindige waardy weezen zal; om dat $\frac{1}{0}$ oneindig groot is.

D. T. D. W.

In 't vervolg zal getoont worden, wat dat 'er door deeze oneindigen inhoud (of area) verstaan word; en waarom die inderdaad oneindig is. Men zal meede doen zien, welke de eenheid is, in vergelyk van wien deeze oppervlakte gezegt word oneindig te zyn; want het oneindige daar hier en in 't geheele werk van gesprooken word, is eigentlyk anders niet dan een betrekkelyk oneindig.

VIII.

VIII. VRAAGSTUK.

§. 224. *Word gevraagd om door eene ſtelkundige* reeks *den inhoud aan te wyzen van de oppervlakte* ABLK (Fig. 35.) *die begreepen is tusſchen het deel* KL *van de hyperbol, een deel* AB *van haare misloper, en twee ordinaaten* AK *en* BL, *op dezelve naar gevalle genoomen.*

OPLOSSING.

Om een uitkomſt te bekoomen dat verſchillende is van het laatſt voorgaande, zullen wy op een der misloopers het deel AC $= a$ ſtellen, en den oorſpronk der absciſſen x in dat punt A neemen, maakende AB, of AD $= x$. Door dat zelvde punt A zullen wy een rechte AK trekken eevenwydig aan den anderen misslooper CR, en ſtellen dat AK $= c$ is, en de lynen BL en DM ieder $= y$; door welke onderſtellinge CB of CD $= a + x$ is. Dewyl nu BC×BL of CD×DM $=$ CA×AK is (§. 154), heeft men $(a+x)y$ $=$

$=ac$; by gevolg $y=\frac{ac}{a+x}$; en deelende den teller van deeze breuk door deszelfs noemer, is $y=c-\frac{cx}{a}+\frac{cx^2}{a^2}-\frac{cx^3}{a^3}$, enz. of $=c\times(\frac{x^0}{a^0}-\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^3}{a^3}$, enz.) die des te eerder afneemen zal naar maate x kleinder als a is. (Zie de aanmerking §. 217.) neemende de som van alle de termen, heeft men voor de misloopers inhoud ABLK of ADMK, deeze waardy $c\times(\frac{x^1}{a^0}-\frac{x^2}{2a}+\frac{x^3}{3a^2}-\frac{x^4}{4a^3}+\frac{x^5}{5a^4}$, enz.) en stellende de twee lynen AC en AK gelyk aan elkander en ieder gelyk aan de eenheid, is ABLK of ADMK $=$ $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}$, enz. Zoo men in plaats van den oorspronk der x naar de kant van F te neemen, dezelve naar de kant van C nam; of, het geene op 't zelvde uitkomt, indien 'er eene hyperbolische oppervlakte, als AGHK gevraagd wierd; behoeft men maar in de gevonde reeks, $c-\frac{cx}{a}+$ enz. (voor de waardy van

y

y verkreegen) de x ontkennend te neemen, waar door die *reeks* in $y = c + \frac{cx}{a} + \frac{cx^2}{a^2} + \frac{cx^3}{a^3} +$ enz. veranderen zal. Neemende de ſom van iedere term (ſtellende altoos AC = AK = 1) is $AGHK = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} +$ enz. By gevolg zal de algemeene *reeks* $x \mp \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \frac{x^4}{4} +$ enz. de misloopers oppervlaktens aanwyzen, aan beide de zyden van de rechte lyn AK genoomen.

D. T. D. W.

I. GEVOLG.

§. 225. Wanneer de lyn CB = b geſteld word, dat men eene andere absciſſe BD = z neemt wiens oorſpronk in B en wiens ordinaat DM = t is, en dat CA = AK = a genoomen word; zal de hyperboliſche vergelyking deeze zyn $(b+z)t = a^2$. By gevolg zal iedere ordinaat (in het deel LBTX zynde) deeze waar-

T dy

dy geeven $t = \frac{a^2}{b+z}$; veranderende deeze breuk in eene oneindige *reeks*, heeft men $t = \frac{a^2z^0}{b} - \frac{a^2z}{b^2} + \frac{a^2z^2}{b^3} - \frac{a^2z^3}{b^4}$ enz. Neemende de som van die *reeks*, zyn de oppervlaktens LBDM of LBFN enz. ieder $= \frac{a^2z}{b} - \frac{a^2z^2}{2b^2} + \frac{a^2z^3}{3b^3} - \frac{a^2z^4}{4b^4} +$ enz. Zoo men deeze *reeks* gelyk aan de voorgaande steld (gevonden voor ABLK of ADMK) die wanneer men $a = c$ steld verandert in $ax - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3a} - \frac{x^4}{4a^2} + \frac{x^5}{5a^3} +$ enz. of het geene op 't zelvde uitkomt, wanneer de oppervlakte ABLK = LBDM gesteld word, heeft men deeze gelykheid $\frac{a^2z}{b} - \frac{a^2z^2}{2b^2} + \frac{a^2z^3}{3b^3} +$ enz. $= ax - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3a} +$ enz. Deeze *reeksen* eeven veel termen hebbende en de onbepaalde grootheeden in de gelykstandige termen tot de zelvde machten verheeven zynde, zoo is iedere term van de eene *reeks* gelyk aan de teegen overstaande in den anderen; en dus $ax = \frac{a^2z}{b}$ of $x = \frac{az}{b}$; waar uit verkreegen

word

word $a : b = x : z$. Dewyl hier de grootheeden x en b onbepaald zyn, heeft men de vryheid om $b = a + x$ te ftellen; het welke gedaan zynde, is $a : a + x = x : z$, of CA of a: CB of $a + x$ = AB of x: DB of z. By gevolg is CA: CB = CB — CA: CD — CB, door dien AB = CB — CA en BD = CD — CB; waar uit deeze gelykheid voortkomt CA (CD — CB) = CB (CB — CA) of CA×CD — CA×CB = $\overline{CB}^2$ — CB×CA, en CA×CD = $\overline{CB}^2$; by gevolg ook CA: CB = CB: CD; en dus zyn de absciffen CA, CB en CD (wier verfchillen AB en BD in de gelyke oppervlaktens ABLK en LBDM zyn) in eene meetkunftige *progres*.

II. GEVOLG.

§. 226. Zoo men dan een *reeks* absciffen CA, CB; CD en CF heeft, die in een meetkunftige *progres* zyn, zullen de hyperbolifche *Areas* of inhouden ABLK, BDML, en MDFN, die op de verfchillen deezer absciffen ftaan, aan el-

kander gelyk weezen. By gevolg groejen die *Arëas* ABLK, ADMK en AFNK in in eene telkunstige *progres*, wanneer de abscissen CA, CB, CD, en CF in eene meetkunstigen aangroejen. En dus zullen deeze hyperbolische *Arëas* (volgens de bepaalingen der *Logarithmi*) ook de *Logarithmi* deezer absciссen zyn. Waar uit volgt, dat de *Logarithmi* door middel van deeze hyperbolische *Arëas* bereekend kunnen worden; en omgekeert.

Dit alles is een gevolg van 't geene in het eerste Gevolg beweezen is. Dewyl nu deeze *Theorie* zeer fraay en van groot gebruik is, in verscheide deelen van de Wiskunde, zullen wy dit wat naader onderzoeken; niet twyfelende of het zal den Leezer niet onaangenaam zyn, en daarom zullen wy in de volgende Grondles nog een nieuwe Betooging van deeze waarheid geeven.

V. GRONDLES.

§. 227. *Wanneer men een* reeks *absciffen* CA, CB, CD *en* CF *heeft, welke in*

een

een meetkunstige eevenreedigheid tot elkander zyn: zullen ten 1°. de verschillen AB, BD, *en* DF *ook in een meetkunstige eevenreedigheid tot elkander zyn; Ten 2°. zullen de hyperbolische* Arëas *of oppervlaktens* ABLK, BDML *en* DFNM (*die op deeze verschil-staan*) *aan elkander gelyk zyn* (Fig. 35).

BETOOGINGE.

Ten 1°. Dewyl ∺ CA : CB : CD : CF is, zal CB — CA : CA = CD — CB : CB, en CD — CB : CB = CF — CD : CD zyn; by gevolg (door dien CA, CB, en DC in eene meetkunstige eevenreedigheid zyn) zullen de verschillen CB — CA, CD — CB, en CF — CD, of AB, BD en DF, ook in zoodaanige een eevenreedigheid weezen.

D. T. B. W. ten 1°.

Ten 2°. Laat 'er veronderfteld worden, dat de verschillen AB en BD ieder in een gelyk aantal gelyke deelen B*b*, en *d*D, gedeeld zyn, zoodaanig dat ieder van

deeze deelen oneindig klein zy in vergelyk van die lynen AB en BD; laat 'er meede gesteld worden, dat de hyperbolische oppervlaktens ABLK en BDML te saamen gesteld zyn uit kleine rechthoeken BblL en DdmM enz. hebbende de lynen Bb en Dd enz. voor grondlynen, en de ordinaaten deezer lynen voor hoogtens; dan blyft 'er alleen oover te betoogen dat deeze *aangroeisels* (of oneindige kleine deelen) aan elkander gelyk zyn; dewyl hun aantal aan beide zyden eeven groot gesteld word te zyn. Dierhalven is

Bb: Dd = AB : BD, en door het eerste lid
. . . AB: BD = CA : CB; nu is (om de meetkunstige *reeks*) CA : CB = CB: CD; daar by CD×DM = CB×BL; by gevolg CB: CD = DM: BL; dewyl dan deeze *reeks* van gelyke *Reedens* niet afgebrooken is, heeft men Bb: Dd = DM : BL; by gevolg Bb×BL = Dd×DM, of BblL = DdmM. Op dezelvde wyze kan de gelykheid van de verdere *aangroeisels* betoogt worden, en dus zullen de hyperbolische *Aréas* aan elkander gelyk zyn, wan-

wanneer hunne grondlynen de verschillen zyn van de in eene meetkunstige *progres* staande abscissen.

D. T. B. W. ten 2e.

I. GEVOLG.

§. 228. Wanneer de hyperbels abscissen C A, C B, C D en C F in eene meetkunstige opgaande *progres* zyn, zullen haare ordinaaten AK, BL, DM en NF in eene meetkunstige, maar afgaande *progres* weezen; daar by zal de eevenreedigheid van die ordinaaten in vergelyk van de eersten AK, meede in een aangroejende meetkunstige *progres* zyn; want zy gesteld dat q de *Reeden* van AK tot BL aanwyst; dan zal die van AK tot DM door q^2 aangeweezen worden, en die van AK tot NF door q^3; by gevolg zullen de hyperbolische *Areas* A B L K, ADMK en AFNK de *Logarithmi* zyn, niet alleen van de abscissen CB, CD en CF, maar ook van de ordinaaten BL, MD,

 en

en NF, en van de *Reeden* die de eerste ordinaat AK tot die zelvde BL, MD en NF heeft.

II. GEVOLG.

§. 229. Zoo men door het middelpunt C, de diameeters CK, CL, CM en CN enz. trekt; is het zichtbaar dat de hyperbel-stukken (*Sectеur hyperb.*) CLK, CML, CNM enz. gelyk aan elkander zyn, en aan de *correspondeerende* hyperbolische *Arëas* ABLK, BDML en DFNM; want zy gesteld, dat den diameeter CL de ordinaat AK in het punt P doorsnyd, dan is den △ CPK gelyk aan de vierhoek APLB, (want neemende van de beide gelyke △s CAK en CBL (§. 144.) de gemeene △ CAP weg, zullen de overblyfsels naamentlyk den △ CPK = aan de vierhoek APLB zyn.) Zoo men dan byderzyds den △ PLK by doet, is het hyperbel-stuk CLK=ABLK; en zoo met de anderen. Waar uit volgt, dat wanneer de hyperbolische *Arëas* AL, MA en AN in

eene

eene telkunstige *progres* aangroejen en dat de zelve de *Logarithmi* zyn van de absciſſen CB, CD, en CF, of van de ordinaaten BL, DM en FN, of wel van de *Reedens* $\frac{AK}{BL}$, $\frac{AK}{DM}$, $\frac{AK}{FN}$, dan zullen de hyperbel-ſtukken CLK, CMK, en CNK ook in eene telkunſtige *progres* aangroejen, en zy zullen ook, de *Logarithmi* van die zelvde grootheeden zyn.

III. GEVOLG.

§. 230. Uit het vooren gezegde volgt nog, dat wanneer de ordinaaten AK en BL eevenreedig zyn aan de ordinaaten MD en FN; of het geene op het zelvde uitkomt, wanneer de absciſſen CA, CB; CD en CF eevenreedig zyn, zullen de *aſſymptotiſche Arëas* ABLK en DFNM of de *correſpondeerende* hyperbel-ſtukken aan elkander gelyk zyn. Dit volgt nootzaakelyk, dewyl deeze *Arëas* tot elkander zyn als de *exponenten* der eevenreedigheeden van de ordinaaten AK, BL; DM en FN.

IV. GEVOLG.

§. 231. Laat als nog verondersteld worden, dat AC = AK = 1 is, en laat den oorspronk der abscissen in het punt A genoomen zyn; zoo men AB of AG = x steld, is CB = $1 + x$ en CG = $1 - x$; en dewyl de *reeks* $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$ enz. de *Aria* ABLK, aanwyst, en de *Aria* AGHK meede door deeze *reeks* $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$ enz. aangeweezen word; zoo volgt, dat deeze twee *reekzen* de *Formula* zyn der *Logarithmi* van de getallen $1 + x$ en $1 - x$; zoodaanig dat den eersten, de *Logarithmi* van de getallen die grooter als de eenheid zyn, aanwyst; en de tweede, de *Logarithmi* van de getallen kleinder als de eenheid. Dewyl nu de eenheid altyd = 0 in de *hyperbolische Logarithmi* gesteld word; zal de *Logarithmus* van een breuk $1 - x$ noodzaakelyk eene ontkennende grootheid zyn; by gevolg zullen alle de teekens van de tweede *reeks* moe-

moeten veranderen, dezelve schryvende als volgt, $-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$ enz. Het het geene buiten dat, klaarblykelyk is, dewyl de *Aréas* ABLK, en AGHK aan verschillende zyden van den oorspronk der abscissen geplaatst zyn, en dus wanneer den eene stellig is, zal den ander ontkennend moeten weezen.

V. GEVOLG.

§. 232. Dewyl 'er, om de uitkomst der deelinge van twee getallen door middel van de *Logarithmi* te bekoomen, niet anders te doen is dan de *Logarithmus* van den deeler van die van het deeltal af te trekken; zoo volgt, dat wanneer men van de *reeks* $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ enz. (zynde de *Logarithmus* van $1+x$) deeze *reeks* $-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$ enz. (zynde de *Logarithmus* van $1-x$) af-trekt, dat het verschil, zynde $2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\frac{2x^7}{7}$ de *Logarithmus* van het ge-

getal $\frac{1+x}{1-x}$ weezen zal, en by gevolg is deeze *reeks* de *Logarithmus* van een iegelyk getal ('t zy geheel of gebrooken) dat door $\frac{1+x}{1-x}$ aangeweezen kan worden.

VI. Gevolg.

§. 233. Wanneer $\frac{1+x}{1-x}$ gegeeven is; en dezelve verondersteld word gelyk te zyn aan de breuk $\frac{M}{N}$ (die in een geheel getal verandert wanneer $N = 1$ gesteld word); zal het gemakkelyk weezen de waardy van x te bepaalen. Want zoo $\frac{M}{N} = \frac{1+x}{1-x}$ is, zal $x = \frac{M-N}{M+N}$ zyn. Laat L de *Logarithmus* van $\frac{M}{N}$ zyn, dan is $L = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5}$, enz. stellende in deeze vergelyking voor x de waardy $\frac{M-N}{M+N}$, zal men de *Logarithmus* L van het getal $\frac{M}{N}$ verkrygen; die des te naader bepaald

zal

zal zyn, naar maate 'er een grooter aantal termen van de *reeks* genoomen worden, (welke altoos een naaderende *reeks* is).

Hier uit word 'er eene algemeene *Reegel* afgeleid om de *Logarithmi* van de geheele en van de gebrooke getallen te bereekenen; dewyl een iegelyk geheel getal gelyk is aan een breuk, wiens teller het zelvde geheele getal en wiens noemer de eenheid is.

Algemeene Reegel om de Hyperbolische Logarithmus *voor een gegeeve getal te bereekenen.*

§. 234. Wanneer het getal, waar van de *Logarithmus* begeert word, een geheel is, moet het zelve eerst in een gebrooke verandert worden met 'er de eenheid als noemer onder te stellen; vervolgens moet men *het verschil van den teller en noemer door hun som deelen, en het dubbeld van alle de termen wier* exponenten *oneeve getallen zyn, gedeeld zynde ieder door zyn eige* ex-

po-

ponent, *zullen een reeks uitmaaken, waar van de som gelyk is aan het gevraagde* Hyperbolische Logarithmus.

VOORBEELD.

§. 235. Word gevraagd de *Hyperbolische Logarithmus* van het getal 2; of van de breuk $\frac{2}{1}$ te bereekenen. Laat gesteld worden dat M = 2 is en N = 1, dan zal x of $\frac{M-N}{M+N} = \frac{1}{3}$ zyn. Stellende voor x en desselfs machten die grootheid $\frac{1}{3}$ en zyne machten in de reeks $2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} +$ enz.; verkrygt men de gevraagde *Logarithmus* van 2; het zelve geschied op de volgende wyze, door middel van de tiendeelige gebrookens.

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{1} \times 0,33333333 = 0,33333333$$

$$\frac{x^3}{3} = \frac{x}{9\times3} = \frac{1}{3} \times 0,03703703 = 0,01234567$$

$$\frac{x^5}{5} = \frac{x^3}{9\times5} = \frac{1}{5} \times 0,00411522 = 0,00082304$$

$$\frac{x^7}{7} = \frac{x^5}{9\times7} = \frac{1}{7} \times 0,00045724 = 0,00006532$$

$$\frac{x^9}{9} = \frac{x^7}{9\times9} = \frac{1}{9} \times 0,00005080 = 0,00000564$$

$$\frac{x^{11}}{11} = \frac{x^9}{9\times11} = \frac{1}{11} \times 0,00000564 = 0,00000051$$

De fom . . = 0,34657351
waar van het dubbeld . . = 0,69314702
dus is 0,69314702 de *Hyperbolifche Logarithmus* van 2.

I. De *reeks* welke welke hier door den Schryver gegeeven word, gaat zeer langzaam voort; dat is te zeggen, dat de waardyen van de naabuurige termen zeer weinig van elkander verfchillen; het welke zeer verdrietig is wanneer de *Logarithmus* van een groot getal begeerd word; by voorbeeld wanneer de *Logarithmus* van 19 gevraagd wierd, zoude M = 19, en N = 1 zyn; en dus $x = \frac{M-N}{M+N} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10} = ,\ 9$; waar in den teller zeer weinig van den noemer verfchild, zoo dat men hier meer als twintig termen noodig heeft, om niet in de duyzentfte deelen te fylen.

II. De befte *reeksen* die tot noch toe tot onze

ze kennisse zyn gekoomen om de *Hyperbolische* en *Tafel Logarithmi* met weinig omslag en moeite te bereekenen, zyn die welke den Vermaarde Heer EULER gegeeven heeft in zyn *Institutiones Calculi Differentialis* Pag. 368, 369, en vervolgens; maar vermits deeze *reekzen* niet anders betoogt kunnen worden dan door de *Fluxie Reekening*; zy het genoeg dezelve, tot gebruik der Liefhebberen, hier zonder bewys ter needer te stellen.

I. $L(u-x)=Lu-\frac{nx}{u-x}+\frac{nx^2}{2(u-x)^2}-\frac{nx^3}{3(u-x)^3}$ + enz.

II. $L(u+x)=Lu+\frac{nx}{u+x}+\frac{nx^2}{2(u+x)^2}+\frac{nx^3}{2(u+x)^3}$ + enz.

III. $L(x+1)=Lx+n\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}+\text{enz.}\right)$

IV. $L(x-1)=Lx-n\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{4x^4}+\text{enz.}\right)$

V. $L(x+1)=L(x-1)+2n\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}+\text{enz.}\right)$

VI. $L(x+1)=Lx+n\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}+\frac{1}{3(x+1)^3},\text{ enz.}\right)$. Welke *reekzen* alle, veronder-

stel-

ſtellen dat 'er eene *Logarithmus* bekend is.

III. Om het gebruik van die verſchillende *reekzen* te doen zien, moet 'er voor eerſt aangemerkt worden, dat in de *Hyperboliſche Logarithmi* $n = 1$ is, en in de *Tafel Logarithmi* $n =$ 0,4342944. De reedenen hier van zyn in de Aanmerkingen op het volgende § vinden.

IV. Zoo men het *Logarithmus* van 19 begeerde; gegeeven zynde het *Logarithmus* van 15; kan de tweede *reeks* van gebruik zyn, ſtellende $u =$ 15 en $x = 4$; want $L(15+4)$ is $= L\,19$. Maar zoo het getal van welke de *Logarithmus* gevraagd wierd, maar 1 van het gegeeve *Logarithmus* verſchilde, kan men een van de vier laatſte *reekzen* gebruiken. By voorbeeld wanneer de *Logarithmus* van 9 en van 11 gevraagd worden door middel van de *Logarithmus* van 10; zal het beeter zyn de derde en vierde *reeks* dan de zesde te gebruiken, want $x = 10$ zynde is $L(x+1) = L\,11$. en $L(x-1) = L\,9$; waar door de termen van deeze, alle machten van het getal 10 zyn; daar zy in de zesde, alle machten van 11 zoude zyn. Het zelvde heeft ook plaats voor de andere getallen.

V. Hier uit blykt het ook, dat de *Reekening der Oneindige* zeer fraaye en beknopte wyzen tot de Bereekeningen aan de hand geeft, want om door de gewoone wyze zoodaanig een *Logarithmus* te bereekenen heeft men ten minſte drie of vier uuren noodig, daar in teegendeel het zelve door middel van deeze *reekzen* in een half uur geſchieden kan.

AANMERKINGE.

§. 236. Zoo men dit getal 0,6931470? welke de *Hyperbolische Logarithmus* van 2 is, met de *Tafel Logarithmus* van het zelve getal, zynde 0,3010300 vergelykt; word men draa gewaar dat deeze verschillende *Logarithmi* tot onderscheide Saamenstellingen (*Systemes*) zyn behoorende, doch wanneer de *Hyperbolische Logarithmus* van een getal gegeeven word, is het gemakkelyk de *Tafel Logarithmus* voor dat zelvde getal te vinden door middel van eene enkele eevenreedigheid, geschiedende het zelve op de volgende wyze. Laat L de *Hyperbolische Logarithmus* zyn van 't getal van welke de *Tafels Logarithmus* gevraagd word; nu is de *Tafel Logarithmus* van 10 = 1,00000000; daar by heeft men (op een soortgelyke wyze als in het voorgaande §) gevonden, dat de *Hyperbolische Logarithmus* van 10 gelyk is aan 2,30258509; dus heeft men deeze eevenreedigheid . . . .

2,30258509 : 1,00000000 = L : x =

LX

$\frac{L \times 1,00000000}{2,30258509} = L \times 0,43429448$, welke waardy van *x* gelyk is aan de gevraagde *Tafels Logarithmus*; om dit nog te verkorten, heeft men (eens voor al deeze waardy van *x* gevonden zynde) de gegeeve *Hyperbolische Logarithmus* maar door dit getal 0,43429448 te vermeenigvuldigen (aan welke de Wiskunstenaars de naam van *Module der Hyperbolische Logarithmi* gegeeven hebben) en het *product* zal de gevraagde *Tafels Logarithmus* zyn. By voorbeeld zoo men het getal 0,69314702, zynde de gevonde *Hyperbolische Logarithmus* van 2 door de *Module* vermeenigvuldigt, zal het *product* zynde . . . . . 0,3010299246144496 gelyk zyn aan de *Tafels Logarithmus* van het zelvde getal, of neemende de acht eerste cyffers, 0,30103000; om dat, 09926 enz. omtrent gelyk zyn aan 1.

Al het geene in de voorgaande Aanmerking gezegt is, steund op dit Grondbeginzel, dat de *Logarithmi* van de zelvde getallen in verschillende hyperbels genoomen (of dat het zelvde is, de vier-

hoeken of hyperbel-ſtukken op eevenreedige ordinaaten) altoos in eene beſtendige *Reeden* zyn. Om niets weegens de *Theorie* der *Logarithmi* oover te ſlaan zullen wy dit ten oovervloeden in de volgende Sesde Grondles nog eens betoogen.

I. De wyze om de *Logarithmi* tot verſchillende Saamenſtellingen (*Syſtemes*) behoorende, van elkander af te leiden, is op deeze Waarheid gevestigt; *Dat in de verſchillende* Saamenſtellingen *de* Logarithmi *van een zelvde getal, altoos in eene beſtendige* Reeden *tot elkander zyn.* Om deeze Grondles te betoogen zullen wy hier eerſt eene Bepaalinge der *Logarithmi* geeven, zoodaanig als die in de *Analyſis* gegeeven word.

II. *De* Logarithmus *is den* Exponent *van eene macht waar van den* bazis *a eene beſtendige grootheid is.* By voorbeeld indien $a^x = y$ is, zal x de *Logarithmus* van y zyn; het welke dus aangeweezen word $x = Ly$, uit deeze eigenſchap vloeid die Bepaaling der *Logarithmi* voort, welke in 't gemeen van dezelve gegeeven word.

III. Wanneer men de vergelyking $a^x = y$ tot verſchillende machten verheft, dusdaanig dat men verkryge $a^{1x} = y$, $a^{2x} = y^2$, $a^{3x} = y^3$, $a^{4x} = y^4$, enz. zal $x = Ly$, $2x = Ly^2$, $3x = Ly^3$, $4x = Ly^4$

enz.

mus zyn: Hier uit blykt, dat de *Logarithmi* x, $2x$, $3x$, $4x$ enz. in eene Telkunstige *progressie* zyn, en hunne getallen y, y^2, y^3, y^4 enz. in eene Meetkunstige.

§. IV. Dit gesteld zynde, laaten x en z twee verschillende *Logarithmi* van een zelvde getal y zyn, zoodanig dat die *Logarithmi* x en z aan verschillende Saamenstellingen zyn behoorende, wiers *bazissen* de grootheeden a en b zyn; dan is $a^x = y$ en $b^z = y$, by gevolg $a^x = b^z$ en $a = b^{\frac{z}{x}}$. Nu is het onmogelyk de grootheid b tot eene veranderlyke macht $\frac{z}{x}$ te verheffen, ten zy $\frac{z}{x}$ eene bestendige *Reeden* zy; by voorbeeld $\frac{c}{1}$, 't welke zynde, zal $a = b^{\frac{z}{x}} = b^c$ zyn; maar $\frac{z}{x} = c = \frac{c}{1}$; dus $1 : c = x : z$. Waar uit de Waarheid van de voorgezegde Grondles blykt.

V. Laat $y = 10$ zyn; de *Hyperbolische Logarithmus* van 10 is $= 2,30258509 = z$; de *Tafels Logarithmus* van 10 is $= 1,0000000 = 1 = x$; by gevolg is $1 : c = x : z = 1 : 2,30258509$, het welke de eevenreedigheid aanwyst die er tusschen een *Hyperbolische* en *Tafels Logarithmus* van een en zelvde getal is, en waar door de *Tafels Logarithmus* in *Hyperbolische* verandert kunnen worden vermeenigvuldigende dezelve door . . . 2,30258509.

VI. Door middel van deeze kundigheeden kan men de twee volgende Vraagstukken oplossen.

1° *Gegeeven zynde de* Tafels Logarithmus *x*, *word gevraagd de* Hyperbolische Logarithmus *z* *van het zelfde getal.* Door het bovengestelde zal die *Hyperbolische Logarithmus* = ..., 2,302585093 zyn.

2° *Gegeeve zynde eene* Hyperbolische Logarithmus *z*, *word gevraagt de* Tafels Logarithmus *x te bepaalen.* Dit geval is door den Schryver opgelost.

VII. Om niets aan de begeerte van den Leezer over te laaten weegens de *Hyperbolische Logarithmi*, zullen wy 'er het volgende Vraagstuk by doen.

Een Hyperbolische Logarithmus *gegeeven zynde; deszelfs getal door middel van een reeks te bepaalen.*

Den Heer *Simpson* heeft dit Vraagstuk opgelost in het tweede deel van zyn *Calculs of Fluxions* Pag. 499. Maar wy zullen 'er eene Stelkundige oplossing van geeven; die van den grooten *Euler* in zyne *Analysis Infinitorum*, is van al te veel kundigheeden afgeleid, om dezelve hier te kunnen plaatzen. Onze Schryver heeft beweezen, dat

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{enz.}$$ is. Laat

nu $y = L(1+x)$ zyn, dan moet men het getal x door middel van de *Logarithmus* y bepaalen. Wy zullen veronderstellen dat den Leezer bekend zy, de uitneemende fraaye wyze van *Newton*, genaamd de *Weederkeering der Reekzen* (*reversio serierum*)

de

de Uitlegging derzelver is te vinden in de Algebra van *Maclaurin*, *Chapitre XII*, *Seconde partie Section I.* en in de *R. P. Reynaud Analyse Demontrez* §. 234. *pag.* 436.

Het is klaar dat x of $1+x$ door een *reeks* moet aangeweezen worden; zy dan volgens de weederkeering der *reekzen* $x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + Fy^6 +$ enz. Nu is $y = l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} +$ enz. by gevolg $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} -$ enz. . . . . . $- y = 0$. Zoo men dan voor x de waardyen steld die de booven gegenoemde *reeks* geeft, heeft men . . . . . .

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + \text{enz.}$$

$$-\frac{x^2}{2} = -\frac{A^2y^2}{2} - ABy^3 - \frac{B^2y^4}{2} - ADy^5 \text{ enz.}$$

$$+\frac{x^3}{3} = \ldots + \frac{A^3y^3}{3} + A^2By^4 + A^2Cy^5 + \text{enz.}$$

$$- ACy^4 - BCy^5 - \text{enz.}$$

$$+ AB^2y^5 + \text{enz.}$$

$$-\frac{x^4}{4} = \ldots - \frac{A^4y^4}{4} - A^3By^5 - \text{enz.}$$

$$+\frac{x^5}{5} = \ldots \frac{A^5y^5}{5} + \text{enz.}$$

$$-y = \ldots - y$$

Om voor deeze onbepaalde *Coefficienten* A, B, C, D, enz. eene bestendige waardy te verkrygen, moeten de gelykstandige termen gelyk een nul gesteld worden; het welke geschiedende zal $A - 1 = 0$ zyn, of $A = 1$, $B - \frac{A^2}{2} = 0$, of $B = \frac{A^2}{2} = \frac{1}{2}$;

$C = AB - \frac{A^2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$; $D = \frac{B^2}{2} - A^2B + AC + \frac{A^4}{4} = \frac{1}{24}$; op de zelvde wyze $E = \frac{1}{120}$; deeze waardyen van A, B, C, D, E, enz. in de *reeks* voor x gesteld zynde, geeven $x = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \frac{y^5}{120} +$ enz., by gevolg is het getal $1+x = 1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{2.3}+\frac{y^4}{2.3.4}+\frac{y^5}{2.3.4.5}+$ enz.

VIII. Men kan meede het getal van eene *Hyperbolische Logaritbmus*, door middel van de *Tafels* vinden; want men heeft dezelve maar te veranderen in een *Tafel Logaritbmus* op de voorgestelde wyze, en dan zal het getal welke daar aan ooverëenstemd, het gezogte getal zyn.

IX. De *Logaritbmus* van den *bazis* altoos $= 1$ zynde, zal x meede $= 1$ weezen, waar door $a^x = a^1 = y = a$ is; by gevolg $1 = La$; nu is den *bazis* der *Tafel Logaritbmi* altoos 10, dierhalve is de *Logaritbmus* van $10 = 1$. Stellende dan de eenheid voor y in de gevondene *reeks* N°. VII. zal $x+1$ den *bazis* der *Hyperbolische Logaritbmi* zyn; en stellende de getallen, zal men vinden dat $L(1+x)$, of den *bazis* der *Hyperbolische Logaritbmi*, gelyk is aan 2.7182818.

Zoo men dan de *bazis* der *Hyperbolische Logaritbmi* zynde 2,7182818 $= a$ steld, zal $a^y = 1+x = 1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{2.3}+\frac{y^4}{2.3.4}+$ enz. zyn. Welke

reeks

reeks van groot gebruik is in de *Fluente Reekening.*

X. Uit deeze gestelde Grond-begintzelen, kan op eene zeer eenvoudige wyze afgeleid worden, die Bepalinge welke de *Stelkunstenaaren* gemeenlyk van deeze *Hyperbolische Logarithmi* geeven. Naamentlyk indien e eene oneindige kleinen zynde, de *Logarithmus* is van het getal $1+e$ of van de met eene oneindige kleinen vermeerderde eenheid, zal e eene *Hyperbolische Logarithmus* zyn. Het welke gemakkelyk uit deeze *reeks* $L(1+x)$ $= x + \frac{x^2}{2} +$ enz. afgeleid kan worden. Want zoo 'er gesteld word dat x oneindig klein is, moeten de hoogere machten van dezelve in vergelyk van de eerste macht verdwynen; by gevolg is $L(1+x)$ $= Lx$; het welke eene zeer fraaye eigenschap der *Hyperbolische Logarithmi* is.

Den Heer *Simpsom* heeft in zyne Driehoeks-Meetkunde *Pag.* 38; de *Hyperbolische Logarithmi* uit dit Grond-begintzel afgeleid, of schoon dien Wiskunstenaar in zyne Bepalinge weegens die getallen, niet gezecht heeft dat deeze e eene oneindige kleine weezen moet. Zie hier zyne eige woorden. *De* Hyperbolische Logarithmus *van eenig getal is den* Exponent *van die* Term *der Logarithmische* (telkonstige) progres, *oover een koomende met het voorgestelde getal, vermeenigvuldigt met het* exces *der gemeene* Ratio *hier booven de eenheid.* (zie *Clairaud Meetkunde Pag.* 253.) Dus doende moet $ne = L(1+e)^n = nL(1+e)$ zyn,

 dat

dat niet mogelyk is, ten zy e oneindig klein gesteld word, want $nL(1+e)$ is $= n$ . . . $\left(e + \frac{e^2}{2} + \frac{e^3}{3} + \text{enz.}\right)$; welke *reeks* niet gelyk zyn kan, dan in de booven genoemde onderstellinge.

VI. GRONDLES.

§. 237. *Laaten 'er twee verschillende hyperbels* AM *en* DN (Fig. 36 en 37.) *gegeeven zyn, ieder in 't byzonder tusschen haare misloopers beschreeven, laat* CA *en* AB *de halve assen van den eersten,* CD *en* DF *die van de tweeden zyn; zoo men op een der misloopers, van iedere hyperbel, de absciffen* CG, CP; CL *en* CQ *neemt, alle in dezelve eevenreedigheid tot elkander; zullen Eerstelyk, alle de ordinaaten* GA, PM; DL *en* QN, *die door de uitersten, van deeze absciffen getoogen zyn, eevenwydig aan de misloopers* Cb, *en* Cf *ieder in ieder, ook in eevenreedigheid tot elkander zyn: Ten tweede, zullen de hyperbolische* Areas AGPM, *en* DLQN *tusschen die ordinaaten* AG, PM *en* DL, QN *begreepen, tot elkander zyn gelyk de rechthoeken der assen,*

sen; of gelyk de machten AGCH *en* DLCK *van die hyperbole* AM *en* DN *tot elkander zyn.*

BETOOGINGE.

Ten 1e. Door de stelling is CG : CP = CL : CQ; en door een eigenschap der hyperbel is CG : CP = PM : GA en CL : CQ = QN : DL; by gevolg ook PM : GA = QN : DL.

D. T. B. W. ten 1e.

Zoo men dan, de zyde CG of GA van de macht AGCH = aan *m* steld, en de zyde CL of DL van de andere macht DLCK = *n*, CP = *x*, PM = *y*, LQ = *u* en QN = *z*; heeft men *m* : *m* + *x* = *n* : *n* + *u*; en by gevolg $u = \frac{nx}{m}$.

Ten 2e. Laat 'er door de uitersten G en L van de rechte AG en DL, de lynen GR en LS getrokken zyn, ieder in 't byzonder loodrecht op de misloopers CH en CK; dan is het zichtbaar dat de

Areas

Arëas AGPM en DLQN in beide de hyperbels, begreepen tusschen de hellende ordinaaten AG, PM; DL en QN, tot de *Arëas* zyn, die dezelvde grondlyn hebben maar in eene loodrechte stand zyn; gelyk de *Sinus totus* of *geheele boekmaat*, is tot de *Sinus* of *boekmaat* der hellingshoek van de misloopers; naamentlyk in de eerste hyperbel, gelyk CG tot GR; en in de tweede gelyk CL tot LS; om dan deeze *Arëas* te bepaalen, behoeft men den inhoud van deeze vierhoeken maar te neemen als of de ordinaaten loodrecht op de misloopers stonden, en ze vervolgens maar vermeenigvuldigen door de *Reedens* $\frac{GR}{CG}$ en $\frac{LS}{CL}$; dit gesteld zynde, geeft de geevenredigheid CG : CP = PM : AG of $m : m+x = y : m$, deeze waardy $y = \frac{m^2}{m+x}$ of $m^2 \times \frac{1}{m+x}$, brengende die breuk tot eene oneindige *reeks*, heeft men $y = m^2 \times (\frac{x^0}{m} - \frac{x}{m^2} + \frac{x^2}{m^3} - \frac{x^3}{m^4}$ enz.).
Neemende de som van iedere term, (eeven als voor §. 224) is de *Arëa*
AGPM

AGPM $= \frac{RG}{CG} \times m^2$ of $RG \times m \times$ $\left(\frac{x}{m} - \frac{x^2}{2m^2} + \frac{x^3}{3m^3} - \frac{x^4}{4m^4} + \text{enz.} \right)$

Op de zelvde wyze heeft men uit de eevenreedigheid CL : CQ = QN : DL of $n : n + u = z : n$; $z = \frac{n^2}{n+u} = n^2 \times \frac{1}{n+u}$; en brengende deeze breuk tot eene oneindige *reeks*, $z = n^2 \times \ldots\ldots \left(\frac{n^0}{n} - \frac{u}{n^2} + \frac{u^2}{n^3} - \frac{u^3}{n^4} + \text{enz.} \right)$; neemende de ſom van iedere term is de *Area* DLQN $= \frac{LS}{CL} \times n^2$ of $LS \times n \times \left(\frac{u}{n} - \frac{u^2}{2n^2} + \frac{u^3}{3n^3} - \frac{u^4}{4n^4} + \text{enz.} \right)$; welke verandert in $LS \times n \times \ldots\ldots \left(\frac{x}{m} - \frac{x^2}{2m^2} + \frac{x^3}{3m^3} - \frac{x^4}{4m^4} + \text{enz.} \right)$ wanneer $\frac{nx}{m}$ voor u geſteld word.

Dewyl nu deeze beide *reekzen* dezelvde zyn, heeft men AGPM : DLQN $=$ $RG \times m : LS \times n$; maar $RG \times m =$ AGCH en $LS \times n =$ DLCK; by gevolg zyn de hyperboliſche *Areas* AGPM en DLQN tuſ-

tusschen eevenreedige ordinaaten begreepen, tot elkander als de machten der hyperbels in welke zy gevonden worden, en dus ook als de rechthoeken der assen van die zelde hyperbels.

D. T. B. W. ten 2.

I. GEVOLG.

§. 238. Wanneer men de halve assen van eene hyperbel gelyk steld te zyn aan *a* en *b*; en de halve assen van de andere hyperbel gelyk aan *c* en *d*; zullen de hyperbolische *Aréas* tusschen eevenreedige ordinaaten begreepen; of het geene op 't zelve uitkomt, de verschillende *Logarithmi* van het zelvde getal (welke aangeweezen word door de *Reeden* van die ordinaaten of haare absciſſen) tot elkander zyn als de rechthoeken *ab* en *cd*; of wel als de *paralelogrammen* op twee toegevoegde - diameeters gemaakt; wyl alle deeze *paralelogrammen* gelyk zyn aan den rechthoek der assen (§. 158).

II.

II. GEVOLG.

§. 239. Wanneer de hyperbels die men met elkander vergelykt eenen as gemeen hebben, zullen de verschillende *Logarithmi* van het zelvde getal tot elkander zyn, als de oneevene en niet gemeene assen tot elkander staan. Zoo de assen van den eene in weederkeerige *Reeden* tot de assen van den ander zyn, zullen die byzondere *Logarithmi* van het zelvde getal ook aan elkander gelyk zyn, om dat in dat geval $ab = cd$ is. Indien de hyperbels gelykvormig zyn, of 't geene op het zelvde uitkomt, indien die kromme lynen met de zelvde misloopers-hoek beschreeven zyn; zullen de verschillende *Logarithmi* van de zelvde getallen, tot elkander zyn als de vierkanten der assen, of der gelykstandige diameeters.

III. GEVOLG.

§. 240. By gevolg is de macht van eene hyperbel of den rechthoek van haare

re assen, de maat welke de groote bepaald der *Logarithmi* van de verschillende getallen, door de eevenreedigheid der ordinaaten aangeweezen; en de *Module* van eene geheele Saamenstelling van *Logarithmi* (*sistème de Logarithmes*) is anders niet als de macht van de hyperbel op welke de *Logarithmi* bereekend zyn.

IV. GEVOLG.

§. 241. Zoo 'er dan de *Logarithmus* van een getal gegeeven is, bereekend zynde op eene hyperbel waar van de assen of de macht meede bekend is, en dat 'er de *Logarithmus* van dat zelvde getal in eene andere hyperbel bereekend, begeerd wierd; van wier het vermoogen meede gegeeven was, behoeft men alleen deeze volgende eevenreedigheid te maaken; *De gegeeve macht van den eersten hyperbel staat tot de macht van de tweeden, gelyk de gegeeve* Logarithmus *staat tot de begeerde.*

V. GEVOLG.

§. 242. En omgekeert, zoo 'er twee *Logarithmi* van een zelvde getal bekend zyn, behoorende tot twee byzondere hyperbels en dat een van beide haare machten bekend is, kan de macht van de andere altoos gevonden worden, door de volgende evenreedigheid; *De* Logarithmus *van de hyperbel wier macht gegeeven is staat tot de* Logarithmus *van de hyperbel wier macht begeert word; gelyk de gegeeve macht tot de gezochte.*

By voorbeeld; zoo 'er begeert wierd de macht van de hyperbel te bepaalen, op welke de *Tafels Logarithmi* bereekend zyn; zal men de macht van een ander hyperbel gelyk stellen aan 1,00000000, en in die stelling een *Logarithmus* voor eenig getal bereekenen, (by voorbeeld dat van het getal 2, welke §. 235. gevonden is gelyk te zyn aan 0,69314702) vervolgens zal men de *Tafel Logarithmus* van het

zelvde getal neemen die = 0,3010300 is, en deeze evenredigheid maaken 0,69314702: 0,3010300 = 1,00000000: 0,43429448, welke de *Module* of *Macht* der hyperbel is, door middel van welke de *Tafels-Logarithmi* bereekend kunnen worden; waar uit volgt, dat men deeze (naamentlyk de *Tafels Logarithmi*) ook als *Hyperbolische Logarithmi* kan aanmerken; zelvs zoude het belachelyk zyn de *Tafel Logarithmi* van de anderen te onderscheiden; ten zy men de naam van *Hyperbolische Logarithmi* aan eenig byzondere soort van *Logarithmi* wilde geeven, gelyk sommige Schryvers gedaan hebben.

VI. GEVOLG.

§. 243. By gevolg is de *Area* van een hyperbolische vierhoek, als A G P M (*Fig.* 36.), of de *Logarithmus* van de *Reden* der ordinaaten AG tot PM die dien inhoud besluiten, tot de macht van de hyperbel als 0,43429448 tot 1,00000000; waar uit voortvloeid, dat den inhoud van

die

die vierhoek gemakkelyk te bepaalen is door middel van de *Tafels Logarithmi*, gelyk in 't volgende Vraagstuk blyken zal.

IX. VRAAGSTUK.

§. 244. *Word gevraagd den inhoud van eene hyperbolische vierhoek* AGPM (Fig. 36.) *te bepaalen door middel van de* Tafels-Logarithmi, *wanneer de* Reeden *der ordinaaten* AG *en* PM *gegeeven is*.

OPLOSSING.

Dewyl de hyperbel AM gegeeven is, zal desselfs macht ook bekend zyn; laat dezelve = 1,0000000 gesteld worden; zoekt vervolgens de byzondere *Logarithmi* van de beide ordinaaten AG en PM; neemd desselvs verschil, (welk verschil de *Logarithmus* van de *Reeden* $\frac{AG}{PM}$ van die ordinaaten zal zyn) en maakt deeze eevenreedigheid, 4342948 *is tot het verschil der* Logarithmi *van de ordinaaten* AG

en PM; *gelyk* 100000060 *tot den inhoud tusschen die zelvde ordinaaten* AG *en* PM *begreepen.*

D. T. D. W.

Het is noodig aan te merken, dat wanneer de *Module* 434 enz. als een geheel getal genoomen word, dan ook het verschil der beide *Logarithmi* als zoodaanig een getal moet aangezien worden.

VOORBEELD.

§. 245. Laat 'er gesteld worden, dat de ordinaaten AG en PM tot elkander zyn als 36 tot 5. De *Logarithmi* van deeze getallen zyn 1, 55630250 . . . en 0, 69897000, van welke het verschil als een geheel getal aangezien zynde = is aan 85733250; maaakende dan deeze eevenreedigheid . . . . . .
43429448 : 85733250 = 100000000 : AGPM, welke = is aan 197408 10 gelyke deelen als die waar in de macht verdeeld is geworden.

De

De Heer *Huyghens* is den eersten geweest, welke deeze inhoud-vinding van de hyperbel gegeeven heeft: dezelve is te vinden in zyne Verhandeling oover de *Horologio Oscillatorio*, met dit verschil echter, dat dien Schryver dit Vraagstuk oplost met het zoeken der *Logarithmus* van den inhoud AGPM. De oplossinge die wy hier gegeeven hebben is veel gemakkelyker als de zynen, ten zy men groote *Logarithmi Tafels* heeft.

Aanmerkingen weegens de natuur der oneindige tusschenwyte, die 'er begreepen is tusschen de hyperbel en haare mislooper.

§. 246. Wy hebben (§. 225.) beweezen, dat wanneer de absciffen CA, CB, CD en CF enz. (*Fig.* 35.) in eene meetkunstige *progres* aangroejen dan ook hunne verschillen meede in zoodaanig eene *progres* aangroejende zyn, terwyl hunne ordinaaten in dezelvde *Reeden* afneemen. Zoo men nu veronderfteld dat den in-

 houd

houd tusschen de hyperbel en haare mislooper begreepen, gedeelt is in een meenigte bepaalde oppervlaktens (eeven als ABLK en BDML zyn), staande op de verschillende in eene meetkunstige *progres* zynde abscissen, dan zullen alle deeze oppervlaktens aan elkander gelyk zyn (§. 225). Daar by laat verondersteld worden, dat de laatste van alle de moogelyke ordinaaten, oneindig klein is in vergelyk van den eersten AK; dan zyn 'er een oneindig aantal termen tusschen deeze twee in, alle in dezelvde afgaande meetkunstige *progres*; en by gevolg een oneindig aantal verschillen; en dus ook zoodanig een getal bepaalde oppervlaktens, alle gelyk aan elkander en gelyk aan ABLK; in diervoegen, dat de laatste van deeze oppervlaktens eeven zoo groot is als den eersten derzelver. Om nu ieder van deeze oppervlaktens te kunnen bepaalen, moet de groote van de grondlyn en de hoogte derzelver in aanmerking koomen. Het is klaarblykelyk, dat wanneer de ordinaat van de laatste hyperbolische vierhoek

on-

oneindig klein is in vergelyk van de ordinaat BL van den eerste vierhoek ABLK; dan ook het laatste verschil der absoissen, of de grondlyn van de laatste hyperbolische vierhoek, oneindig maal grooter zal weezen als het eerste verschil AB; en dus is deeze laatste oppervlakte weeder eene bepaalde grootheid. By gevolg is de geheele oppervlakte tusschen de hyperbol en haare mislooper begreepen, oneindig. Wat de eenheid aanbelangt tot dewelke deeze oneindig gereekend word te zyn, dezelve is willekeurig, en by gevolg kan men 'er ook de grootheid ABLK voor neemen; maar zoo men in plaats van de oppervlakte ABLK, de hyperbolische vierhoek ADMK nam, die 'er het dubbeld van is; zoude de uitkomst, hoewel oneindig, eevenwel aanwyzen hoe meenigmaal die hyperbolische oppervlakte deeze tweede bevat; en deeze uitkomst zoude ook maar de helft zyn van de eerste uitkomst, welke aanwees hoe meenigmaal de oppervlakte ABLK in die *Assymptotische* tusschenwyte begree-

pen was. Daar is dan een oneindig, welke tot een ander oneindig in eene gegeeve *Reeden* is, aangezien twee gegeeve lynen die tot elkander eene eindige *Reeden* hebben, ieder in een oneindig aantal kleine eevenreedige deelen kunnen gedeeld worden, welke gelyke oneindige kleine deelen tot elkander in dezelvde *Reeden* zullen zyn als de gegeeve lynen (*).

I. GEVOLG.

247. Alle het zoo eeven gezegde, ter betooginge, dat de *Assymtotische* tusschenwyte oneindig is, rust alleen hier op, dat de ordinaaten in dezelvde *Reeden* afneemen als die waar in haare absciffen, of derzelver verschillen, aangroejen; waar uit een algemeene reegel afgeleid kan worden; om te onderscheiden of een *reeks*, uit een oneindig aantal termen bestaande, eene eindige of wel eene oneindige som heeft. *Ten dien einde moet 'er in iedere term twee machten (dimensions)* on-

(*) Zie onze aanmerking op §. 213.

onderſcheide worden, en gezien, of zy ook dus zyn, dat zoo als de eerſte opklimt, zoo ook de tweeden afgaat; dit zoo zynde zal de ſom der termen nootzaakelyk oneindig zyn. Wanneer de eene minder opklimt als den ander afneemd; (en men deeze reeks *het agterſte vooren keert) zal men een term verkrygen die gelyk aan nul is; en by gevolg, zal die* reeks *in dit geval eene bepaalde grootheid hebben.* Door het verzuimen, van de beſtaanbaarheid deezer twee laatſte gevallen in acht te neemen, heeft de Heer *Wallis*, die tuſſchenwyte meer als oneindig aangezien, wanneer de eene macht (*dimenſion*) meer aangroeide als den andere afnam; en andere Wiskunſtenaaren zyn in naavolging van hem in het zelvde wanbegrip gevallen. Alleenlyk moet men acht geeven, dat in dit laatſte geval de *reeks* in eene *ontkennende* gedaante voortkomt; doch zy blyft daarom eindig. Verders is dit Grond-beginzel niet alleen toepaſſelyk tot de oppervlakte der kromme lynen, maar ook op de lighaamen door derzelver omwentelinge voortgebracht.

II. GEVOLG.

§. 248. Het is betoogt, dat wanneer de oneindige *Assymptotische* inhoud CRSLXT ront-om den *Assymptote* CT wentelt, dat dezelve een eindig lighaam beschryft die het dubbeld is, van een *Cylinder* of *Rol*, welke een cirkel voor grondvlak heeft op de lyn CR beschreeven en voor hoogte de lyn RS; het geene in den eersten opslag vreemt schynd te weezen. Op wat wyze kan een eindig lighaam uit de voortgang van eene oneindige oppervlakte voortkoomen? Zoude deeze oneindigen teeler ook van natuur veranderen door de omwenteling? dit is onbegrypelyk. Zelfs zoude veele overhellen te gelooven dat deeze voortbrengende oppervlakte niet oneindig was. Doch dit zoude eene groove misstellinge zyn, want die zelvde reeden, waar door de *Assymptotische* tusschenwyte, oneindig is, is ook die geene waar door het op zoo een wyze voortgebragte lighaam

haam eene eindige grootheid is; en men ziet hier eene gelukkige toepassinge van de Grondreegel in het voorgaande gevolg ter needer gesteld. De gelyke tusschen-wytens ABLK en BDML, maaken in hunne omwenteling om den mislooper CT een *reeks* van lighaamen, in welke de grondvlakken en hoogtens in acht genoomen moeten worden. De grondvlakken deezer lighaamen verminderen in dezelvde *Reeden* als de vierkanten der ordinaaten AK en BL enz., dat is te zeggen, als de vierkanten der termen van de tot in 't oneindige afneemende meetkunstige *progres*; terwyl hunne hoogtens of de verschillen AB, BD, en DF enz. aangroejende zyn, eeven als de termen van eene tot in 't oneindig opklimmende meetkunstige *progres*; by gevolg zal het laatste lighaam nootzaakelyk gelyk aan nul zyn. En dus is deeze *reeks* van lighaamen bepaald, en de oneindige *Assymptotische Arëa*, moet een eindig lighaam voortbrengen.

§. 249. Om niets weegens dit laatste Ge-

Gevolg over te laaten, zullen wy den inhoud van een lighaam bepaalen, voortgebracht zynde door de omwenteling van de *Assymptotische Aréa* rontom den mislooper C T. Laat 'er door het punt H een rechte lyn HQ getoogen zyn eevenwydig aan de mislooper C T, en door het punt h, eene rechte hq oneindig dicht by den eersten. Niets belet 'er te onderstellen dat zoo een lighaam gemaakt is uit een oneindig aantal kleine ringetjes, alle voortgebracht door de omwenteling van een klein vierkantje, eeven als $QqbH$. Door dien nu alle deeze ringetjes een zelvde grondvlakte hebben, zullen zy tot elkander zyn als de oppervlaktens der *Cylinders*, of *Rollen*, door de omwenteling van QH om CT voortgebracht. By gevolg is de som van alle deeze kleine lighaamen als de som van alle deeze oppervlaktens. Dit gesteld zynde maakt CR $= a$, RS $= b$, CQ $= x$ en QH $= y$; en laat c den omtrek zyn, door de straal CR beschreeven; dan is a : $c = x$: $\frac{cx}{a} =$ aan den omtrek door de straal CQ

CQ beschreeven. By gevolg is $\frac{cxy}{a}$ gelyk aan de oppervlakte door de omwenteling van HQ beschreeven; maar om dat $xy = ab$ is, zal $y = \frac{ab}{x}$ zyn, en dus $\frac{cxy}{a} = \frac{cabx}{ax} = bcx^{\circ}$; welkers som $= cbx$ is; en zoo $x = a$, gesteld word, zal het lighaam door de omwenteling van de *Assymptotische Area* voortgebracht, gelyk zyn aan *abc*. Waar uit klaarblykelyk volgt, dat dit lighaam het dubbeld is van een *Cylinder* welke een cirkel op CR beschreeven voor grondvlak heeft, en de lyn RS voor hoogte.

Uit deeze Grondbegintzelen zoude ook kunnen betoogt worden, dat indien die zelvde *Assymptotische Area* CRSLXT rontom de mislooper CR wentelde, er een lighaam voortgebracht zoude worden, dat oneindig zoude zyn in vergelyk van het lighaam, welke door de omwenteling van die zelvde *Area* om de mislooper CT voortgebracht is geworden.

Van



Van de Gelykvormige Keegel-Sneeden.

BEPAALINGEN.

§. 250. Twee Keegel-sneeden worden gezecht *gelykvormig* te zyn, wanneer de assen *Aa*, en *Bb* van de eenen, eevenreedig zyn aan de assen *Dd* en *Ff* van de anderen (*Fig.* 38. 39 *en* 40).

I. GEVOLG.

§. 251. By gevolg zullen zy ook gelykvormig zyn, wanneer de afstanden van het brandpunt tot het middelpunt en tot de uiterstens der assen eevenreedig zyn; want deeze eevenreedigheid brengt nootzaakelyk die der assen meede; waar uit ten klaarsten blykt, dat alle de Parabels gelykvormig aan elkander zyn; dewyl de afstanden van het brand-

brandpunt tot de kruin en tot het middelpunt, altoos tot elkander zyn gelyk, eene eindige grootheid tot eene oneindige.

II. GEVOLG.

§. 252. By gevolg hebben alle de gelykvormige hyperbels dezelvde misloopers, wanneer zy het middelpunt en eenen as gemeen hebben; en omgekeerd; wanneer hyperbels begreepen zyn tusschen twee misloopers die dezelvde hoek met elkander maaken, zyn die hyperbels gelykvormig. Dit alles is een gevolg van de voorgaande Bepalinge en van de beschryving der misloopers.

III. GEVOLG.

§. 253. Dus doende, zullen alle de lynen die met de assen van gelykvormige Keegel-sneeden, gelyke hoeken maaken, eevenredig aan elkander zyn;

by

by voorbeeld, de gelykstandige meede diameeters, de gelykstandige raaken sny-lynen, en de oppervlaktens tusschen gelykvormige stukken van gelykvormige kromme lynen, als meede de gelykvormige deelen van gelykstandige lynen, zullen tot elkander zyn als de vierkanten van de op de zelvde wyze getoogene lynen, in iedere kromme lyn.

GRONDLES.

§. 254. *Laaten 'er twee gelykvormige Keegel-sneeden zyn, welke een en zelvde middelpunt hebben,* (Fig. 38, 39 en 40.) *en wier assen op de zelvde lynen geplaatst zyn; zoo men 'er een diameeter* CDA *of* CAD *in trekt naar gevalle, snydende de binnenste kromme lyn in* D; *door dat punt* D *aan die binnenste kromme lyn een raaklyn* DL, *bepaald wordende aan de buitenste in het punt* L, *en door eenig stip* M *nog eene rechte* MOPN, *byderzyds bepaald worden de aan de buitenste kromme lyn en evenwy-*

T

wy-

wydig zynde aan de raaklyn in D: *zal 'er voor iedere Keegel-sneede deeze gelykheid koomen* $MO \times ON = \overline{DL}^2$.

BETOOGINGE.

Laat a en p de diameeter CA en deszelfs parameeter zyn, α en π de oovereenstemmende diameeter CD met deszelfs parameeter. Dan is het zichtbaar dat de lynen MN en Oo dubbelde ordinaaten van de diameeters CA en CD zyn, welke diameeters deeze ordinaaten ook in tweeën gelyk deelen in de stippen P en P; dus heeft men, $\overline{PM}^2 : \pm \overline{CA}^2 \mp \overline{CP}^2 = p : a$ en $\overline{PO}^2 : \pm \overline{CD}^2 \mp \overline{CP}^2 = \pi : \alpha$; dewyl dan de gelykvormige Keegel-sneeden deeze eevenreedigheid geeven $p : a = \pi : \alpha$; heeft men $\overline{PM}^2 : \pm \overline{CA}^2 \mp \overline{CP}^2 = \overline{PO}^2 : \pm \overline{CD}^2 \mp \overline{CP}^2$; by gevolg (verwisselende en deelende), $\overline{PM}^2 - \overline{PO}^2$ of $MO \times ON : \overline{PM}^2 = \pm \overline{CA}^2 \mp \overline{CD}^2 :$

$\pm \overline{CA}^2 \mp \overline{CP}^2$ en om de ordinaaten DL en PM, is $\pm \overline{CA}^2 \mp \overline{CD}^2 : \pm \overline{CA}^2 \mp \overline{CP}^2 = \overline{DL}^2 : \overline{PM}^2$; by gevolg $MO \times ON : \overline{PM}^2 = \overline{DL}^2 : \overline{PM}^2$; en dus $MO \times ON = \overline{DL}^2$.

D. T. B. W.

Dit Voorſtel is niet toepaſſelyk op de parabel, dan wanneer de lyn AD die geene is welke gevonden moet worden, en dat de parabels zoo geplaatſt zyn als het behoord om een gemeen middelpunt te kunnen hebben. In alle andere gevallen vind men altoos $MO \times ON = AP \times p - PD \times \pi$, welke waardy in $\overline{DL}^2$ verandert, wanneer de parameeters p en π gelyk aan elkander zyn. Hier uit kunnen veele weinig bekende en teffens voortreffelyke Waarheeden afgeleid worden, weegens de verſchillende oneindigen van een en zelvde ſoort.

I. GE-

I. GEVOLG.

§. 255. Laat 'er weederom door het ſtip O eene rechte lyn ROS getoogen zyn, eevenwydig aan een raaklyn GK van de binnenſte kromme lyn; zoo zal 'er op de zelvde wyze betoogt worden dat $RO \times OS = \overline{GK}^2$ is; en by gevolg $MO \times ON : RO \times OS = \overline{DL}^2 : \overline{GK}^2$, waar uit volgt, dat wanneer twee rechte lynen RS en MN naar gevalle getoogen binnen een der Keegel-ſneeden, elkander in een punt O doorſnyden, zullen de rechthoeken hunner deelen tot elkander in eene beſtendige *Reeden* zyn; het geene ook gemakkelyk weegens de uiterlyke ſny-lynen betoogt kan worden.

II. GEVOLG.

§. 256. Hier volgt verder uit; dat de om het zelvde middelpunt ſtaande gelykvormige Keegel-ſneeden, wier aſſen in de zelvde rigting zyn, ook weegens elkander misloopende kromme lynen worden; dat is te zeggen, dat zy elkander tot in 't oneindige naaderen zonder zig ooit te kunnen aanraaken, in gevalle zy oneindige takken hebben, gelyk de Parabel en Hyperbel; waar uit nog volgt, dat deeze laatſte kromme lyn haare misloopers tot in het oneindige moet naaderen, wyl deeze twee lynen (naamentlyk de misloopers) de paal of het perk zyn tusſchen welke alle de gelykvormige hyperbels (die tusſchen deeze lynen beſchreeven kunnen worden) beſlooten zyn.

AANMERKINGE.

Deeze Grondles is een van de ſchoonste die 'er weegens de Keegel-ſneede kan ge-

gegeeven worden, en men zoude gemakkelyk 'er van kunnen afleiden alle de saamenstellingen, die door den Heer *Newton* uitgedagt zyn, om het Vraagstuk van *Pappus* op te lossen, wanneer de kromme lyn een Keegel-sneede is. Men zoude 'er ook gebruik van kunnen maaken, wanneer 'er gevraagd wierd om een Keegel-sneede door verscheide, in een zeekere betrekkinge gegeeven punten, te doen gaan. Het bestek van dit Werk laat ons niet toe verder uit te wyden: die geene welke lust hebben om het meer uit gebreid te zien, kunnen het werk gebruiken, welke ik oover eenige Jaaren weegens de Keegel-sneeden heb uitgegeeven (*).

(*) Wy vermeenen dat dit werk voor tytel voert, *Elemens des Sections Coniques demontré par Synthese.*

E Y N D E.



DRUK-FEILEN.

Bladzyde 18 reegel 22 op het einde, ftaat KN:, lees AN:

- - - - 23 laatfte reeg. ftaat $+\frac{a\sqrt{6}}{5}$ - - $\pm\frac{a}{5}\sqrt{9}$.

- - - - 50 reegel 8, ftaat AT— lees AT=

- - - - 53 - - - 15, - - - $\overline{Fd}$ - - $\overline{Fd^2}$

- - - - 54 - - - 21, - - - M - - L.

- - - - 60 onder aan ftaat (x) Eucl. II: lees, (a) Eucl. XI: 6. Op die zelvde plaats ftaat nog (v) Eucl. II. 5. lees (v) Eucl. XI: 5.

Bladz. 85 reegel 23, ftaat Eucl. Def. VI: 5. lees Eucl. Def. X: 5:

. . . . 92 . . . 9, ftaat; die kromme lyn een raaklyn aan te trekken, lees, aan die kromme lyn een raaklyn te trekken.

Bladz. 105 reegel 4, ftaat rQ, QM en Qr, lees rQ, QM en Qt.

. . . . 109 . . . . 11, op het einde ftaat P lees B

. . . . 116 onder aan ftaat Eucl. II: 6. lees Eucl. XXXII: 6.

. . . . 117 . . . . . . (b) Eucl. XVII: 5. lees Eucl. XVIII: 5. (c) Eucl. IV en XVI: 5. . . Eucl. XV en XVI: 5. (e) Eucl. VII: 6. . . Eucl. II: 6.

Bladz. 153 reegel 3, ftaat $y^2(x^2-a^2)\frac{b^2}{a^2}$

lees $y^2=(x^2-a^2)\frac{b^2}{a^2}$

Bladz. 163 onder aan ftaat Eucl. Def. I. 6. lees Eucl. XXIX. 1.

. . . . 193 regel 3, aan het einde ftaat, MR is, altoos. lees MR is, MF altoos

Bladz.

DRUK-FEILEN

Bladz. 220 reegel 3 ſtaat $\mp \overline{CT}^2 \mp \overline{CF}^2 = \frac{\mp a^4}{(a \mp x)^2} \mp c^2$, lees $\pm \overline{CT}^2 \mp \overline{CF}^2 = \frac{\pm a^4}{((a \mp x)^2} \mp c^2$,

Bladz. 221 reegel 6 ſtaat CF lees CP

. . . . 229 . . . 20 . . . Fa . . $\overline{Fa}^2$

. . . . 232 onder aan ſtaat Eucl. II: 3. en Eucl. XI: 6. lees Eucl. III. 3. en Eucl. XIII. 6.

. . . . 234 . . . . . Eucl. XII: 6. lees Eucl. XIII: 6,

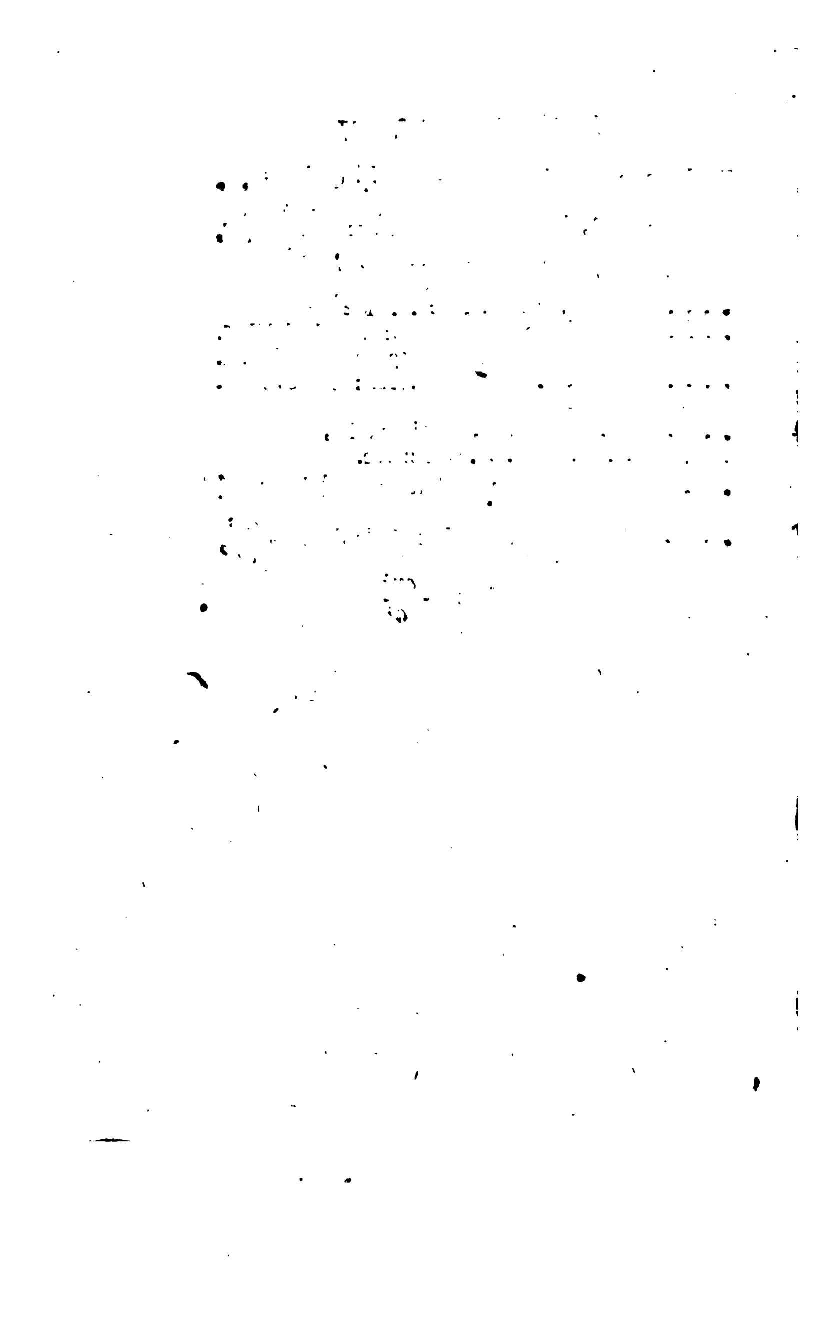
. . . . 240 . . . 4, . . . PL lees, BL

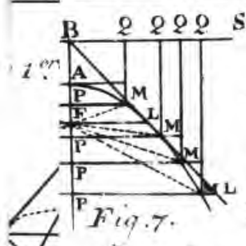
. . . . 18, . . . het zelve.

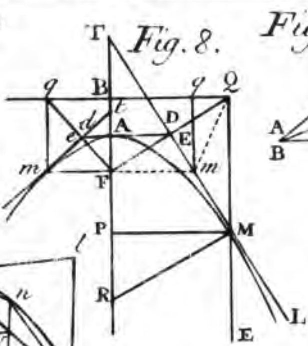
. . . . 270 de laatſte reegel ſtaat $\frac{3}{4}\infty\frac{4}{3}$, lees $\frac{3}{4}\infty\frac{4}{3}$

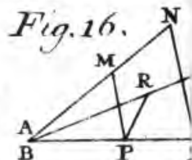
. . . . 288 reegel 4, aan het einde ſtaat $-\frac{cx^3}{a^3}$.

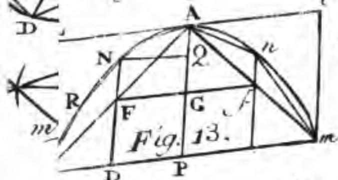
lees $-\frac{cx^4}{a^3}$

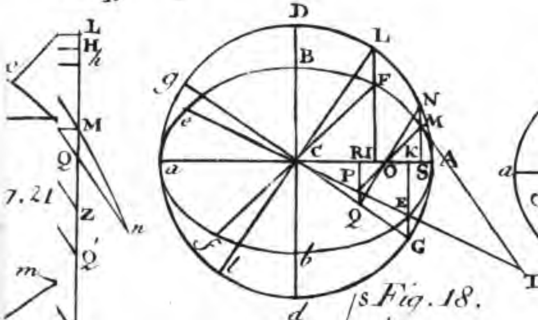


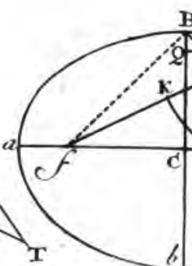

Fig. 7.

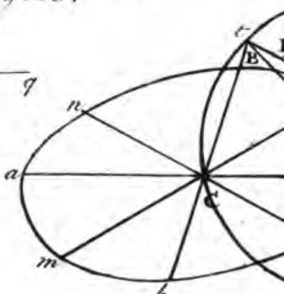

Fig. 8.

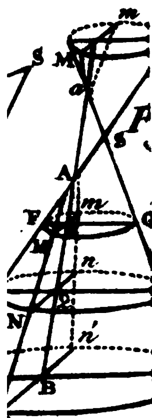

Fig. 16.


Fig. 13.


Fig. 18.







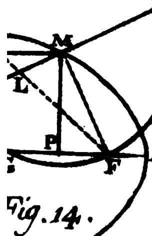


Fig. 14.

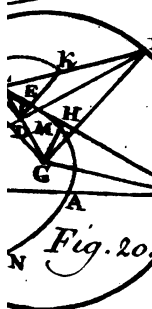
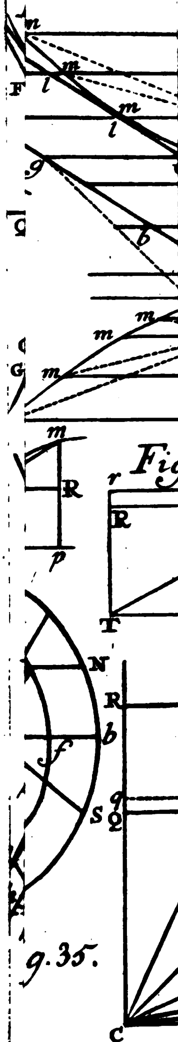


Fig. 20.

Croi

Pl. II.



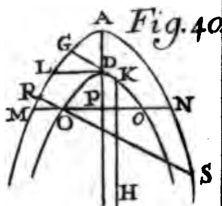




Fig. 39.

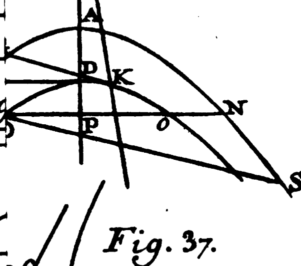
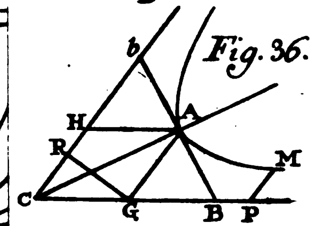
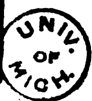


Fig. 37.

Fig. 36.



Creit. sc.

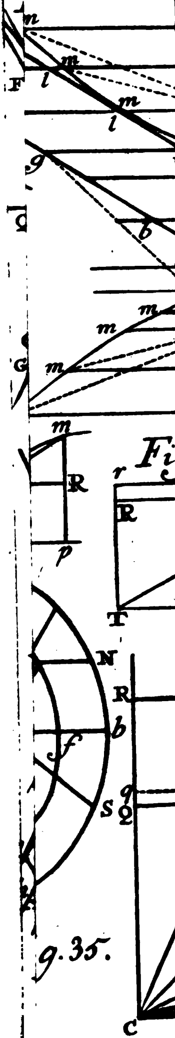


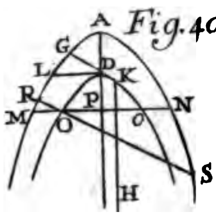
Pl. 1

Fig. 14.

Fig. 20.

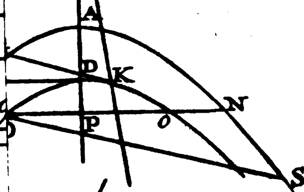
Pl. II.





d
a
C
b
f

Fig.39.



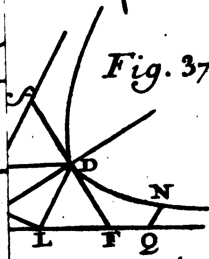
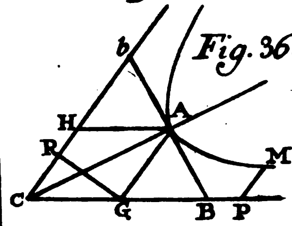


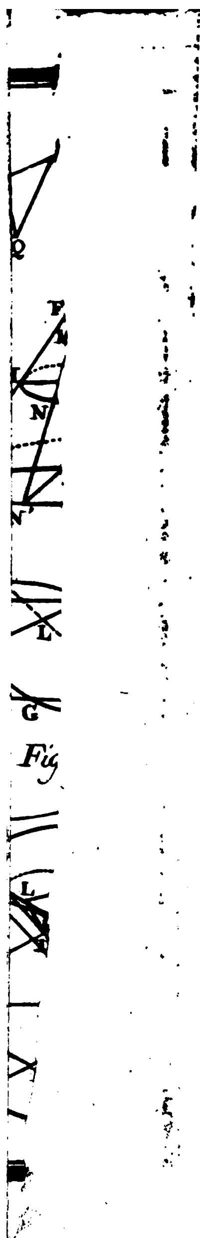
Fig. 37.

Fig. 36.



Creit. sc.




Q
F
N
L
G
Fig
L

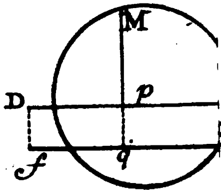


Fig. 44.

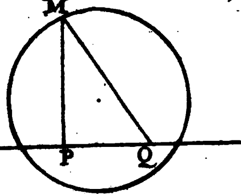


Fig. 47.

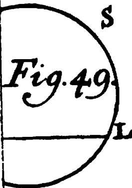


Fig. 49.

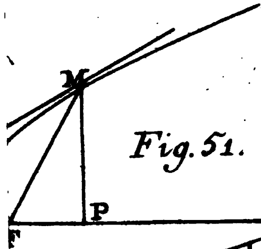


Fig. 51.

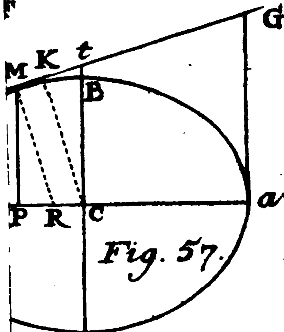


Fig. 57.

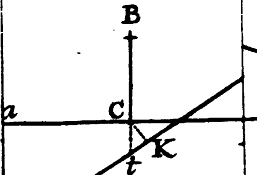


Fig. 58.

